Chapitre 32

Séries numériques et familles sommables

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définitions

1.1 Série

Définition 1.1 (Série, terme général, somme partielle)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

(a) **La série de terme général** u_n , notée $\sum u_n$, est la suite $(S_n)_n$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, le réel u_n est **le terme général** de la série.

(c) Le réel S_n est **la somme partielle d'indice** n de la série.

1.2 Convergence et divergence

Définition 1.2 (Série convergente/divergente)

Une série $\sum u_n$ est convergente si la suite $(S_n)_n$ des sommes partielles est convergente. Elle est divergente dans le cas contraire.

Définition 1.3 (Somme d'une série convergente)

Soit $\sum u_n$ une série convergente. La limite de la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est appelée **somme de la série** et est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Proposition 1.4 (Convergence d'une série à terme général complexe)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. La série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si les séries $\sum \mathrm{Re}(u_n)$

et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent, et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n).$$

Définition 1.5 (Nature d'une série)

La nature d'une série $\sum u_n$ est son caractère convergent ou divergent. Étudiez la nature d'une série, c'est déterminer si elle converge ou diverge.

2 Propriétés

2.1 Propriétés des séries convergentes

Proposition 2.1 (Combinaisons linéaires de séries convergentes)

Les combinaisons linéaires de séries convergentes sont convergentes, et la somme d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des sommes.

Proposition 2.2 (Terme général d'une série convergente)

Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Définition 2.3 (Divergence grossière)

Une série $\sum u_n$ diverge grossièrement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

Proposition 2.4

Une série grossièrement divergente est divergente.

2.2 Restes d'une série convergente

Définition 2.5 (Reste d'ordre n)

Soit $\sum u_n$ une série convergente de somme S, et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le **reste d'ordre** n de $\sum u_n$ est le scalaire

$$R_n = S - S_n = \sum_{p=0}^{+\infty} u_p - \sum_{p=0}^{n} u_p.$$

Proposition 2.6 (Écriture $S_n + R_n$)

Soit $\sum u_n$ une série convergente. Soit $n \in \mathbb{N}$ et R_n le reste d'ordre n. La série $\sum_{p\geqslant n+1} u_p$ est convergente et $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$, et de plus,

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_n + R_n = \sum_{p=0}^{n} u_p + \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p.$$

Proposition 2.7 (Convergence de la suite des restes)

Soit $\sum u_n$ une série convergente, et $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des restes. Alors $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ou encore

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2.3 Lien série-suite

Proposition 2.8 (Lien série-suite)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. La série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont même nature.

3 Exemples

Proposition 3.1 (Série géométrique)

Soit $a \in \mathbb{K}$. La série $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$, et dans ce cas , $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

Proposition 3.2 (Série exponentielle)

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{a^n}{n!}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$.

Définition 3.3 (Séries spéciales alternées)

Une série spéciale alternée est une série $\sum(-1)^n u_n$ où (u_n) est une sute décroissante convergente vers 0.

Proposition 3.4 (Convergence des séries spéciales alternées)

Une série spéciale alternée est convergente.

4 Séries de nombres réels positifs

Définition 4.1 (Série à termes positifs)

Une série $\sum u_n$ est à termes positifs si $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 4.2 (Convergence de séries à termes positifs)

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

Proposition 4.3

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Si la série converge, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} u_p \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Sinon, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Théorème 4.4

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. Alors

1. Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge aussi et dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

2. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge aussi (vers $+\infty$).

Corollaire 4.5 (Termes positifs dominés, négligeables)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n = o(v_n)$ ou $u_n = O(v_n)$.

1. Si $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge également.

2. Si $\sum u_n$ diverge, la série $\sum v_n$ diverge également.

Corollaire 4.6 (Séries à termes positifs équivalents)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (*i.e.* elles sont simultanément convergentes ou divergentes).

5 Absolue convergence

Définition 5.1 (Absolue convergence)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes. La série $\sum u_n$ est *absolument convergente* lorsque la série $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 5.2 (Convergence absolue implique la convergence)

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Alors $\sum u_n$ converge. De plus, on a $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Corollaire 5.3 (Séries à termes dominés)

Soient $\sum u_n$ une série complexe, et $\sum v_n$ une série à termes positifs, avec $\sum v_n$ convergente. Si $u_n = O(v_n)$ ou si $u_n = o(v_n)$, la série $\sum u_n$ converge absolument.

Méthode 5.4 (Utilisation de développements asymptotiques)

Voici un exemple d'utilisation de la convergence abolue et de séries à termes positifs équivalents/dominés.

Soit $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$. Comme $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + t^3\varepsilon(t)$ avec $\varepsilon(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, alors

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + v_n,$$

où $v_n = -\frac{1}{3n^{3/2}} - \frac{1}{3n^{3/2}}\varepsilon\left((-1)^n/\sqrt{n}\right)$.

On en déduit que $|v_n| \sim \frac{1}{n^{3/2}}$. Or, $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (*cf.* plus loin les séries de Riemann), donc par équivalence de séries à termes constants, $\sum v_n$ converge absolument, donc converge.

Mais $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (c'est une série spéciale alternée), et $\sum(-\frac{1}{2n})$ diverge (série harmonique), donc $\sum u_n$ diverge car c'est la somme de deux séries convergentes et d'une série divergente.

6 Comparaison série-intégrale

6.1 Comparaison des natures

Proposition 6.1 (Comparaison série-intégrale)

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et f une fonction continue par morceaux sur $[n_0, +\infty[$, positive et décroissante. La série $\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$ et la suite $\left(\int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{d}t\right)_{n \geqslant n_0}$ sont de même nature. Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, on a

$$\int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leqslant \int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{d}t + f(n_0).$$

6.2 Application aux séries de Riemann

Théorème 6.2 (Séries de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

7 Familles sommables

<u>**Toutes les démonstrations sur les familles sommables sont facultatives**</u>.

<u>Notation</u> : on note $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies d'un ensemble I.

7.1 Familles sommables de réels positifs

Définition 7.1 (Famille sommable de réels positifs)

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs indéxée par un ensemble I.

1. On note $\displaystyle\sum_{i \in I} a_i = \sup \left\{ \sum_{k \in F} a_k \mid F \text{ partie finie de } I \right\}$.

2. La famille $(a_i)_{i \in I}$ est sommable si $\displaystyle\sum_{i \in I} a_i < +\infty$.

Proposition 7.2 (Comparaison)

Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ des familles de réels positifs telles que, pour tout $i \in I$, $a_i \leqslant b_i$. Alors

$$\sum_{i\in I} a_i \leqslant \sum_{i\in I} b_i.$$

En particulier, si $(b_i)_{i\in I}$ est sommable, $(a_i)_{i\in I}$ l'est également.

Proposition 7.3 (Sous-famille d'une famille sommable)

Toute sous-famille d'une famille sommable de réels positifs est sommable.

Proposition 7.4 (Invariance par permutation)

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs indéxée par un ensemble I, et σ une permutation de I. Alors

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_{\sigma(i)}.$$

En particulier, la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si la famille $(a_{\sigma(i)})_{i\in I}$ l'est.

Proposition 7.5 (Lien familles finies/séries)

1. Une famille finie de réels positifs est sommable, et sa somme est la somme usuelle.

2. Une suite à termes positifs est sommable si et seulement si la série correspondante est convergente, et dans ce cas, la somme de la série est la somme de la famille.

Proposition 7.6 (Opérations algébriques)

Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ des familles de réels positifs, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$. Alors

$$\sum_{i\in I}(\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i\in I} a_i + \mu \sum_{i\in I} b_i.$$

En particulier, une combinaison linéaire à coefficients positifs de familles sommables est une famille sommable, dont la somme est la combinaison linéaire des sommes.

Théorème 7.7 (Sommation par paquets)

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, et $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I (où J est un ensemble d'indexation). Alors

$$\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} a_i = \sum_{i\in I} a_i.$$

En particulier, si la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, alors la famille $\left(\sum_{i\in I_j} a_i\right)_{j\in J}$ est sommable.

Théorème 7.8 (Théorème de Fubini positif)

Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels positifs, où I, J sont des ensembles d'indéxation. Alors

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{i,j} = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j}.$$

7.2 Familles sommables de nombres complexes

Définition 7.9 (Famille sommable de nombres complexes)

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes indéxée par un ensemble I. La famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si la famille $(|a_i|)_{i\in I}$ est sommable.

On note $\ell^1(I)$ l'ensemble des familles sommables indéxées par I.

Proposition 7.10 (Comparaison)

Soient $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes, et $(b_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs sommables, telles que, pour tout $i \in I$, $|a_i| \leqslant b_i$. Alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable.

Proposition 7.11 (Sous-famille d'une famille sommable)

Toute sous-famille d'une famille sommable est sommable.

Proposition 7.12 (Invariance par permutation)

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes indéxée par un ensemble I, et σ une permutation de I. La famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si la famille $(a_{\sigma(i)})_{i\in I}$ l'est.

Proposition 7.13 (Caractérisation des familles sommables)

1. Une famille de réels $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si les familles de réels positifs $(a_i^+)_{i\in I}$ et $(a_i^-)_{i\in I}$ sont sommables.

2. Une famille de nombres complexes $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si les familles $(\mathrm{Re}(a_i))_{i\in I}$ et $\mathrm{Im}((a_i))_{i\in I}$ sont sommables.

Définition 7.14 (Somme d'une famille sommable)

1. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels sommable. Sa somme est le réel

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^-.$$

2. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes sommable. Sa somme est le nombre complexe

$$\sum_{k\in I} a_k = \sum_{k\in I} \mathrm{Re}(a_k) + i \sum_{k\in I} \mathrm{Im}(a_k).$$

Proposition 7.15

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes sommable et $S = \displaystyle\sum_{k\in I} a_k$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $J_\varepsilon \subset I$ telle que $\left| S - \displaystyle\sum_{j\in J_\varepsilon} a_j \right| \leqslant \varepsilon$.

Proposition 7.16 (Opérations algébriques)

Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ des familles de nombres complexes sommables, et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors $(\lambda a_i + \mu b_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i\in I} a_i + \mu \sum_{i\in I} b_i.$$

Proposition 7.17 (Lien familles finies/séries)

1. Une famille finie de nombres complexes est sommable, et sa somme est la somme usuelle.

2. Une suite de nombres complexes est sommable si et seulement si la série associée est absolument convergente, et dans ce cas, la somme de la série est la somme de la famille.

Théorème 7.18 (Sommation par paquets)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes sommable, et $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I (où J est un ensemble d'indexation). La famille $\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)_{j\in J}$ est sommable, et

$$\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} u_i = \sum_{i\in I} u_i.$$

Théorème 7.19 (Théorème de Fubini)

Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille sommable de nombres complexes, où I, J sont des ensembles d'indéxation. Alors :

1. $\forall\, i \in I$, la famille $(a_{ij})_{j\in J}$ est sommable, et la famille des sommes $\left(\sum_{j\in J} a_{ij}\right)_{i\in I}$ est sommable.

2. $\forall\, j \in J$, la famille $(a_{ij})_{i\in I}$ est sommable, et la famille des sommes $\left(\sum_{i\in I} a_{ij}\right)_{j\in J}$ est sommable.

3. On a : $\displaystyle\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{i,j} = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j}$.

Proposition 7.20 (Produit de familles sommables)

Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ des familles sommables de nombres complexes. Alors la famille $(a_ib_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} a_ib_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right)$.

Théorème 7.21 (Produit de Cauchy de séries absolument convergentes)

Soient $\sum a_n$, $\sum b_n$ des séries de nombres complexes absolument convergentes. La série de terme général $\left(\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente, et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}\right).$$

7.3 Fonction exponentielle

Proposition 7.22

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente.

Définition 7.23

La fonction exponentielle est la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $\displaystyle\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Proposition 7.24

Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$.