Chapitre 31

Espaces préhilbertiens réels

1 Produit scalaire

On fixe dans ce § un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1.1 Définitions

Définition 1.1 (Produit scalaire)

Un *produit scalaire* sur E est une application $\langle . , . \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

(a) **bilinéaire**
(b) **symétrique**
(c) **définie positive**, *i.e.* pour tout $x \in E$, $\langle x , x \rangle \geqslant 0$ et $\Big(\langle x , x \rangle = 0 \Longrightarrow x = 0 \Big)$.

Définition 1.2 (Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens)

(a) Un **espace préhilbertien réel** est un $\mathbb{R}$-espce vectoriel muni d'un produit scalaire.
(b) Un **espace vectoriel euclidien** est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Proposition 1.3

Soit $\langle . , . \rangle$ un produit scalaire sur E, et $x \in E$.

1. $\langle x , 0 \rangle = \langle 0 , x \rangle = 0$.
2. Si $x \neq 0$, alors $\langle x , x \rangle > 0$.

Définition 1.4 (Norme euclidienne)

Soit E un espace préhilbertien réel, $\langle \cdot , \cdot \rangle$ son produit scalaire, et $x \in E$. La norme euclidienne de x est le réel positif $\|x\| = \sqrt{\langle x , x \rangle}$.

Proposition 1.5

Soit $x \in E$, $x \neq 0$. Alors $\|x\| > 0$.

Proposition 1.6 (Identité remarquable)

Soient $x, y \in E$. Alors $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x , y \rangle$.

Méthode 1.7

Il faut savoir développer le carré de la norme euclidienne d'une somme. Si $\langle\ ,\rangle$ est un produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ sa norme associée, $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

$$\|\lambda x+\mu y\|^2 = \langle \lambda x + \mu y\ , \lambda x + \mu y\rangle = \lambda^2 \langle x\ , x\rangle + 2\lambda\mu \langle x\ , y\rangle + \mu^2 \langle y\ , y\rangle = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda\mu \langle x\ , y\rangle + \mu^2 \|y\|^2,$$

par bilinéarité et symétrie du produit scalaire.

Proposition 1.8 (Formule de polarisation)

Pour tous $x, y \in E$, on a $\langle x\ , y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$

1.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire

Dans tout ce §, on fixe un espace préhilbertien réel E, on note $\langle\cdot\ ,\cdot\rangle$ son produit scalaire, et $\|x\| = \sqrt{\langle x\ , x\rangle}$.

Proposition 1.9 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Pour tous $x, y \in E$, on a

$$|\langle x\ , y\rangle| \leqslant \|x\|.\|y\|,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont proportionnels.

Méthode 1.10

Lorsqu'on doit démontrer une inégalité dans un espace préhilbertien, il faut toujours essayer Cauchy-Schwarz.

Proposition 1.11 (Inégalité triangulaire)

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous $x, y \in E$, on a

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|,$$

avec égalité si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $y = tx$ ou $x = ty$.

2 Orthogonalité

Dans ce paragraphe, E est un espace vectoriel préhilbertien réel muni d'un produit scalaire $\langle .\ , .\rangle$.

2.1 Orthogonal d'un ensemble

Définition 2.1 (Vecteurs orthogonaux)

Deux vecteurs x et y sont **orthogonaux** si $\langle x\ , y\rangle = 0$.

Définition 2.2 (Orthogonal d'un ensemble)

Soit X un sous-ensemble non vide de E. **L'orthogonal de** X est le sous-ensemble de E

$$X^\perp = \{y \in E \mid \forall\, x \in X,\ \langle x\ , y\rangle = 0\}.$$

Proposition 2.3

On a $\{0\}^{\perp} = E$ et $E^{\perp} = \{0\}$.

Proposition 2.4 (Opérations avec l'orthogonal d'un ensemble)

Soient A et B deux sous-ensembles non vides de E.

1. $0 \in A^{\perp}$.
2. $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. $A \cap A^{\perp} \subset \{0\}$.
4. Si $A \subset B$, alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
5. $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$.
6. $A \subset B^{\perp} \iff B \subset A^{\perp}$
7. $A^{\perp} = \big(\mathrm{vect}(A)\big)^{\perp}$.

Proposition 2.5

Soient F, G des sous-espaces vectoriels de E. Alors

1. $F \cap F^{\perp} = \{0\}$.
2. Si $F \subset G$, alors $G^{\perp} \subset F^{\perp}$.
3. $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$
4. $F \subset G^{\perp} \iff G \subset F^{\perp}$.

Méthode 2.6 (Montrer qu'un vecteur est orthogonal à un sous-espace vectoriel)

Pour montrer qu'un vecteur est orthogonal à un sous-espace vectoriel, il suffit de démontrer qu'il est orthogonal à une base de ce sous-espace vectoriel .

Définition 2.7 (Sous-espaces vectoriels orthogonaux)

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont orthogonaux si

$$\forall\, x \in F, \quad \forall\, y \in G, \quad \langle x \,, y\rangle = 0.$$

Définition 2.8 (Supplémentaire orthogonal)

Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $E = F \oplus F^{\perp}$. Alors $F^{\perp}$ est **le supplémentaire orthogonal** de F.

2.2 Familles orthogonales

Définition 2.9 (Familles orthogonales - orthonormales)

1. Une famille de vecteurs de E est **orthogonale** si les vecteurs sont orthogonaux deux à deux.

2. Une famille de vecteurs de E est **orthonormale** si elle est orthogonale et si tous les vecteurs sont de norme 1.

Proposition 2.10 (Théorème de Pythagore)

Soient $x, y \in E$. Alors $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff x \perp y$.

Proposition 2.11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X = (x_1, \cdots, x_n)$ une famille orthogonale de vecteurs de E. Alors $\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$.

Proposition 2.12 (Indépendance linéaire d'une famille orthogonale)

Une famille orthogonale de vecteurs **tous non nul** est libre. En particulier, une famille orthonormale est libre.

3 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie

Proposition 3.1

Soit $x \in E$ non nul. Alors $E = x^\perp \oplus \operatorname{vect}(x)$.

Théorème 3.2

Tout espace vectoriel euclidien admet une base orthonormale.

Corollaire 3.3

Soit F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** de E. Alors F admet une base orthonormale.

Théorème 3.4 (Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie)

Soit F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** de E. Alors $E = F \oplus F^\perp$.

Méthode 3.5

Cette démonstration illustre une technique générale à connaître. Lorsqu'on a une combinaison linéaire $\sum_{k=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$, faire un produit scalaire de cette relation avec un vecteur y "bien choisi" peut donner des informations intéressantes (par exemple un y dans un orthogonal..).

Notez aussi l'utilisation de la bilinéarité dans ces démonstrations. Cela dit être absolument maîtrisé !

Corollaire 3.6

Soit F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** de E. Alors $F = \left(F^\perp\right)^\perp$.

4 Espaces vectoriels euclidiens

Dans ce paragraphe, E est un espace vectoriel euclidien : il est donc de dimension finie, et on note $n \in \mathbb{N}^*$ sa dimension.

Dans toute la suite, on fixe un espace vectoriel euclidien E.

Théorème 4.1 (Existence d'une base orthonormale dans le cas euclidien)

1. Tout espace vectoriel euclidien admet une base orthonormale (donc en particulier une base orthogonale).

2. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls d'un espace vectoriel euclidien peut être complétée en une base orthogonale.

Théorème 4.2 (Supplémentaire orthogonal)

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors

1. $E = F \oplus F^{\perp}$

2. $F = (F^{\perp})^{\perp}$

Méthode 4.3 (Procédé d'orthonormalisation de Schmidt)

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On veut construire une base orthonormale $(u_1, \ldots, u_n)$ de E telle que

$$\forall\, p = 1, \ldots, n,\ \operatorname{vect}(u_1, \ldots, u_p) = \operatorname{vect}(e_1, \ldots, e_p).$$

On construit cette famille $(u_p)_{1 \leqslant p \leqslant n}$ par récurrence sur p.

1. On définit u_1 par $u_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$.

2. Supposons alors $u_1, \ldots, u_p$ construits pour un $p < n$. Soit u'_{p+1} le vecteur défini par

$$u'_{p+1} = e_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} a_i u_i,$$

où $a_i = \langle e_{p+1}\,, u_i\rangle$, $i = 1, \ldots, p$. On a alors pour $i = 1, \ldots, p$,

$$\left\langle u'_{p+1}\,, u_i\right\rangle = \langle e_{p+1}\,, u_i\rangle - \sum_{k=1}^{p} a_k \langle u_k\,, u_i\rangle = \langle e_{p+1}\,, u_i\rangle - a_i \langle u_i\,, u_i\rangle = \langle e_{p+1}\,, u_i\rangle - a_i = 0$$

donc la famille $\{u_1, \ldots, u_p, u'_{p+1}\}$ est orthogonale et on pose $u_{p+1} = \dfrac{u'_{p+1}}{\|u'_{p+1}\|}$.

Proposition 4.4 (Composantes dans une base orthonormale)

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base orthonormale de E, et $x, y \in E$, et

$$X = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Alors

1. Les composantes de x dans la base $\mathcal{B}$ sont

$$\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} \langle x \,, e_1\rangle \\ \vdots \\ \langle x \,, e_n\rangle \end{pmatrix},$$

i.e. $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x \,, e_i\rangle\, e_i$, ou encore $x_i = \langle x \,, e_i\rangle$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

2. $\langle x \,, y\rangle = {}^t\!XY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

3. $\|x\|^2 = {}^t\!XX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x \,, e_i\rangle^2$.

Méthode 4.5

Dans le cas d'une base orthogonale $(e_1, \ldots, e_n)$ seulement, le résultat tombe en défaut. On pourra cependant utiliser le fait que la base $(e_i/\|e_i\|)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est orthonormale et travailler avec cette nouvelle base.

5 Projections et symétries orthogonales, distance

Dans tout ce paragraphe, E est un espace vectoriel préhilbertien réel, et F un sous-espace vectoriel de E **de dimension finie** p. On rappelle que $E = F \oplus F^\perp$, que $F = \left(F^\perp\right)^\perp$ et que $E = F^\perp \oplus \left(F^\perp\right)^\perp$. En particulier, tous les résultats qui suivent sont valables si E est euclidien.

5.1 Projections et symétries orthogonales

Définition 5.1 (Projections et symétries orthogonales)

1. La **projection orthogonale** sur F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.
2. La **symétrie orthogonale** par rapport à F est la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.
3. Une **réflexion** est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Proposition 5.2

Avec les notations précédentes, on a

$$\begin{aligned} F &= \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}) \\ F^\perp &= \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(p) \\ \forall\, x &\in E,\ x - p(x) \in F^\perp \end{aligned}$$

Proposition 5.3

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ et $s = 2p - \mathrm{id}_E$. Alors p est une projection orthogonale si et seulement si s est une symétrie orthogonale.

Proposition 5.4 (Expression d'une projection orthogonale dans une base orthonormale)

Soient p la projection orthogonale sur F et $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une base orthonormale de F. Alors, pour tout $x\in E$, on a

$$p(x)=\sum_{i=1}^{p}\langle x\ ,e_i\rangle\, e_i.$$

Méthode 5.5 (Déterminez l'expression analytique d'une projection orthogonale)

On donne un espace vectoriel euclidien E, et un sous-espace vectoriel F. On veut déterminer les composantes de $p(x)$, où p est la projection orthogonale sur F, en fonction de celles de $x\in E$. Pour cela, on résout le système $y\in F$ et $x-y\in F^{\perp}$ d'inconnue y. L'unique solution y est $p(x)$.

6 Distance à un sous-espace vectoriel

Définition 6.1 (Distance, distance à un sous-espace vectoriel)

Soient $x,y\in E$.

1. La **distance de** x **à** y est le réel $\mathrm{d}(x,y)=\|x-y\|$.
2. La **distance de** x **au sous-espace vectoriel** F est le réel $\mathrm{d}(x,F)=\inf_{z\in F}\mathrm{d}(x,z)=\inf_{z\in F}\|x-z\|$.

Proposition 6.2 (Expression de la distance à un sous-espace vectoriel)

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et p la projection orthogonale sur F. Soit $x\in E$. Alors

$$\mathrm{d}(x,F)=\|x-p(x)\|,$$

et pour tout $y\in F$, si $y\neq p(x)$, on a $\|x-y\|=\mathrm{d}(x,y)>\mathrm{d}(x,F)$.