

# Chapitre 31

## Espaces préhilbertiens réels

### 1 Produit scalaire

On fixe dans ce § un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ .

#### 1.1 Définitions

##### Définition 1.1 (Produit scalaire)

Un *produit scalaire* sur  $E$  est une application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

- (a) **bilinéaire**
- (b) **symétrique**
- (c) **définie positive**, *i.e.* pour tout  $x \in E$ ,  $\langle x, x \rangle \geq 0$  et  $(\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0)$ .

##### Définition 1.2 (Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens)

- (a) Un **espace préhilbertien réel** est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
- (b) Un **espace vectoriel euclidien** est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

#### Remarques.

1. Rappelons que bilinéaire signifie que les applications  $\langle \cdot, y \rangle : x \mapsto \langle x, y \rangle$  (à  $y$  fixé) et  $\langle x, \cdot \rangle : y \mapsto \langle x, y \rangle$  (à  $x$  fixé) sont linéaires, et que symétrique signifie pour tous  $x, y \in E$ ,  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ .
2. Comme l'application est symétrique, la linéarité soit à gauche, soit à droite, suffit à prouver la bilinéarité.

##### Proposition 1.3

Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un produit scalaire sur  $E$ , et  $x \in E$ .

1.  $\langle x, 0 \rangle = \langle 0, x \rangle = 0$ .
2. Si  $x \neq 0$ , alors  $\langle x, x \rangle > 0$ .

#### Démonstration.

Fixons  $x \in E$ . Alors  $t \mapsto \langle x, t \rangle$  est une application linéaire, donc s'annule en 0 :  $\langle x, 0 \rangle = 0$ . Par symétrie,  $\langle 0, x \rangle = 0$ .

Puis,  $\langle x, x \rangle \geq 0$ . Mais si  $\langle x, x \rangle = 0$ , alors  $x = 0$ , donc si  $x \neq 0$ , alors  $\langle x, x \rangle > 0$ . ■

### Exemples.

- On définit sur  $\mathbb{R}^2$  le produit scalaire usuel par  $\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' + yy'$  pour tous  $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ . En effet, cette application définie sur  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  est évidemment symétrique. De plus, si  $(x'', y'') \in \mathbb{R}^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a alors

$$\begin{aligned} \langle \lambda(x, y) + (x', y'), (x'', y'') \rangle &= \langle (\lambda x + x', \lambda y + y'), (x'', y'') \rangle = (\lambda x + x')x'' + (\lambda y + y')y'' \\ &= \lambda(xx'' + yy'') + x'x'' + y'y'' = \lambda \langle (x, y), (x'', y'') \rangle + \langle (x', y'), (x'', y'') \rangle, \end{aligned}$$

ce qui prouve la linéarité à gauche, donc la bilinéarité. Enfin,

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = x^2 + y^2 \geq 0$$

et n'est nul que si  $x = y = 0$ , i.e.  $(x, y) = (0, 0)$ .

- Soit  $E = \mathcal{C}(I)$  où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point. Si  $f, g, h \in E$ , on définit le produit scalaire de  $f$  et  $g$  par

$$\langle f, g \rangle = \int_I fg.$$

Comme  $fg = gf$ , cette application est symétrique. De plus, si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a

$$\langle \lambda f + g, h \rangle = \int_I (\lambda f + g)h = \int_I (\lambda fh + gh) = \lambda \int_I fh + \int_I gh = \lambda \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle,$$

ce qui prouve la linéarité à gauche, donc la bilinéarité. Enfin, on a

$$\langle f, f \rangle = \int_I f^2 \geq 0$$

et si cette intégrale est nulle, comme  $f^2$  est positive et continue sur  $I$ , alors  $f^2 = 0$ , donc  $f = 0$ . Ce dernier argument pour montrer que cette application est définie positive est très important, et c'est celui sur lequel il y aura toujours le plus de points.

Attention : ce n'est pas un produit scalaire pour les fonctions continues par morceaux.

### Remarque.

Un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel est un espace préhilbertien réel pour le produit scalaire induit.

### Définition 1.4 (Norme euclidienne)

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  son produit scalaire, et  $x \in E$ . La norme euclidienne de  $x$  est le réel positif  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

### Remarque.

Ce réel est bien défini puisque  $\langle x, x \rangle \geq 0$ .

**Proposition 1.5**

Soit  $x \in E$ ,  $x \neq 0$ . Alors  $\|x\| > 0$ .

**Démonstration.**

Si  $x \neq 0$ , alors  $\langle x, x \rangle > 0$  (le produit scalaire est défini positif). ■

**Proposition 1.6 (Identité remarquable)**

Soient  $x, y \in E$ . Alors  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$ .

**Démonstration.**

Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\langle x, y \rangle,$$

ce qui donne l'égalité. ■

**Méthode 1.7**

Il faut savoir développer le carré de la norme euclidienne d'une somme. Si  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$  et  $\|\cdot\|$  sa norme associée,  $x, y \in E$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , on a

$$\|\lambda x + \mu y\|^2 = \langle \lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle + 2\lambda\mu \langle x, y \rangle + \mu^2 \langle y, y \rangle = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda\mu \langle x, y \rangle + \mu^2 \|y\|^2,$$

par bilinéarité et symétrie du produit scalaire.

**Proposition 1.8 (Formule de polarisation)**

Pour tous  $x, y \in E$ , on a  $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$

**Remarque.**

Cette relation permet de connaître entièrement le produit scalaire dès qu'on connaît la norme.

## 1.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire

Dans tout ce §, on fixe un espace préhilbertien réel  $E$ , on note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  son produit scalaire, et  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

**Remarque.**

On rappelle que deux vecteurs  $x$  et  $y$  d'un espace vectoriel  $E$  sont proportionnels si et seulement si

$$(x = 0 \text{ ou } \exists \lambda \in K, y = \lambda x) \quad \text{ou de façon équivalente} \quad (\exists \lambda \in K, x = \lambda y \text{ ou } y = \lambda x).$$

Attention à ne pas oublier le "ou" dans l'une ou l'autre des définitions. En effet, si  $x = 0$  et  $y \neq 0$ , alors  $x$  et  $y$  sont proportionnels, pourtant il n'existe pas de  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $y = \lambda x$ .

Rappel : "proportionnels" et "liés" sont des termes équivalents pour deux vecteurs.

**Proposition 1.9 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**

Pour tous  $x, y \in E$ , on a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

avec égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont proportionnels.

**Démonstration.**

Soient  $x, y \in E$ . Si  $x = 0$ , alors  $\langle x, y \rangle = 0$  et  $\|x\| \cdot \|y\| = 0$ , donc l'inégalité est bien vérifiée. Supposons alors  $x \neq 0$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a alors

$$\|tx + y\|^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad \|tx + y\|^2 = t^2\|x\|^2 + 2t\langle x, y \rangle + \|y\|^2,$$

donc (car  $\|x\| \neq 0$ )  $\|tx + y\|^2$  est un polynôme du second degré à coefficients réels en  $t$  et positif. On en déduit qu'il s'annule au plus une fois sur  $\mathbb{R}$ , donc que son discriminant est négatif ou nul, *i.e.*

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2,$$

ce qui donne l'inégalité de l'énoncé.

**(Cas d'égalité facultatif)** Traitons maintenant les cas d'égalités. Si  $x, y \in E$  sont tels que  $x = 0$  ou  $y = \lambda x$  ( $\lambda \in K$ ), l'inégalité est une égalité.

Réciproquement, si  $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$ , et si  $x \neq 0$ , d'après les calculs précédents, la fonction polynômiale du second degré  $t \mapsto \|tx + y\|^2$  a un discriminant nul, donc s'annule : il existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $\|t_0x + y\| = 0$ , ou encore  $y = -t_0x$ , donc  $x$  et  $y$  sont proportionnels. ■

**Exemples.**

1. Dans  $\mathbb{R}^2$  : on a pour tous  $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ ,

$$|xx' + yy'| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

2. Dans  $\mathcal{C}(I)$  : on a pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  continues sur  $I$ ,

$$\left| \int_I fg \right| \leq \sqrt{\int_I f^2} \sqrt{\int_I g^2}.$$

**Méthode 1.10**

Lorsqu'on doit démontrer une inégalité dans un espace préhilbertien, il faut toujours essayer Cauchy-Schwarz.

**Proposition 1.11 (Inégalité triangulaire)**

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel. Pour tous  $x, y \in E$ , on a

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

avec égalité si et seulement s'il existe  $t \in \mathbb{R}_+$  tel que  $y = tx$  ou  $x = ty$ .

**Démonstration.**

Soient  $x, y \in E$ . D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \stackrel{(1)}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Traisons maintenant les cas d'égalité. Remarquons tout d'abord que si  $x = 0$ , alors il y a égalité. On suppose alors  $x \neq 0$ . D'après ce qui précède, il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si (1) est une égalité, donc si et seulement si

$$\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|,$$

*i.e.* si et seulement si on a  $\langle x, y \rangle \geq 0$  et il y a égalité dans Cauchy-Schwarz, donc si et seulement si  $\langle x, y \rangle \geq 0$  et il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $y = tx$  (car  $x \neq 0$ ). Or,

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle \geq 0 \text{ et } \exists t \in \mathbb{R} \mid y = tx &\iff \exists t \in \mathbb{R} \mid y = tx \text{ et } \langle x, tx \rangle \geq 0 \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R} \mid y = tx \text{ et } t\|x\| \geq 0 \\ &\stackrel{x \neq 0}{\iff} \exists t \in \mathbb{R} \mid y = tx \text{ et } t \geq 0 \end{aligned}$$

■

**Exemples.**

1. Sur  $\mathbb{R}^2$ , la norme euclidienne associée au produit scalaire usuel est

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

2. Sur  $\mathcal{C}(I)$ , la norme d'une fonction  $f$  continue sur  $I$  est donnée par

$$\|f\| = \sqrt{\int_I f^2}.$$

**Exemple.**

Revenons à l'exemple des fonctions continues sur un segment  $I$ , muni du produit scalaire  $\int_I fg$ . L'inégalité triangulaire donne

$$\sqrt{\int_I (f + g)^2} \leq \sqrt{\int_I f^2} + \sqrt{\int_I g^2}.$$

C'est l'inégalité de Minkowski.

## 2 Orthogonalité

Dans ce paragraphe,  $E$  est un espace vectoriel préhilbertien réel muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

### 2.1 Orthogonal d'un ensemble

#### Définition 2.1 (Vecteurs orthogonaux)

Deux vecteurs  $x$  et  $y$  sont **orthogonaux** si  $\langle x, y \rangle = 0$ .

#### Définition 2.2 (Orthogonal d'un ensemble)

Soit  $X$  un sous-ensemble non vide de  $E$ . L'**orthogonal de  $X$**  est le sous-ensemble de  $E$

$$X^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in X, \langle x, y \rangle = 0\}.$$

#### Exemples.

1. Dans le plan euclidien, l'orthogonal d'une droite est l'unique droite passant par l'origine qui lui est perpendiculaire.
2. Dans l'espace euclidien, l'orthogonal d'un plan est l'unique droite passant par l'origine qui lui est perpendiculaire.
3. Notons  $E$  l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré  $\leq 2$ , que l'on muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

(Vérifiez que c'est un produit scalaire!!) L'orthogonal de la fonction constante égale à 1 est le sous-espace vectoriel

$$F = \{x \mapsto a + bx - 3ax^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

En effet, si  $f : x \mapsto a + bx + cx^2$ , alors  $\int_{-1}^1 (a + bx + cx^2)dx = 2a + \frac{2c}{3}$ , donc

$$f \in 1^\perp \iff \int_{-1}^1 (a + bx + cx^2)dx = 0 \iff c = -3a.$$

#### Proposition 2.3

On a  $\{0\}^\perp = E$  et  $E^\perp = \{0\}$ .

#### Démonstration.

On a bien sûr  $\{0\}^\perp \subset E$ . Mais si  $x \in E$ , alors  $\langle x, 0 \rangle = 0$ , donc  $x \in \{0\}^\perp$ , donc  $\{0\}^\perp = E$ .

Puis si  $x \in E$ , alors  $\langle x, 0 \rangle = 0$ , donc  $\{0\} \subset E^\perp$ . Mais si  $x \in E^\perp$ , alors  $\langle x, x \rangle = 0$  (car  $x \in E!$ ), donc  $x = 0$ , et  $E^\perp \subset \{0\}$ . ■

**Proposition 2.4 (Opérations avec l'orthogonal d'un ensemble)**

Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles non vides de  $E$ .

1.  $0 \in A^\perp$ .
2.  $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
3.  $A \cap A^\perp \subset \{0\}$ .
4. Si  $A \subset B$ , alors  $B^\perp \subset A^\perp$ .
5.  $A \subset (A^\perp)^\perp$ .
6.  $A \subset B^\perp \iff B \subset A^\perp$
7.  $A^\perp = (\text{vect}(A))^\perp$ .

**Démonstration.**

1. Si  $x \in A$ , alors  $\langle x, 0 \rangle = 0$ , donc  $0 \in A^\perp$ .
2. Soit  $x, y \in A^\perp$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors, pour tout  $a \in A$ , on a

$$\langle a, \lambda x + y \rangle = \lambda \langle a, x \rangle + \langle a, y \rangle = 0.$$

De plus,  $0 \in A^\perp$ , donc  $A^\perp$  est bien un sous-espace vectoriel de  $E$ .

3. Si l'intersection est non vide, soit  $x$  dans l'intersection. Alors, par définition,  $\langle x, x \rangle = 0$ , donc  $x = 0$ , donc  $A \cap A^\perp \subset \{0\}$ .
4. Soit  $y \in B^\perp$ . Pour tout  $a \in A$ , on a  $a \in B$ , donc  $\langle y, a \rangle = 0$ , donc  $y \in A^\perp$ , donc  $B^\perp \subset A^\perp$ .
5. Soit  $x \in A$ . Pour tout  $y \in A^\perp$ , on a  $\langle x, y \rangle = 0$ . Donc  $x$  est orthogonal à tout élément de  $A^\perp$ , donc  $x \in (A^\perp)^\perp$ .
6. Supposons  $A \subset B^\perp$ . Alors par 4,  $(B^\perp)^\perp \subset A^\perp$ . Or, par 5,  $B \subset (B^\perp)^\perp$ , donc  $B \subset A^\perp$ . Par symétrie des rôles de  $A$  et  $B$ , on a l'autre implication, donc l'équivalence.
7. Comme  $A \subset \text{vect}(A)$ , le point 4 nous donne l'inclusion  $(\text{vect}(A))^\perp \subset A^\perp$ .

Soit maintenant  $y \in A^\perp$  et

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in \text{vect}(A),$$

, où  $x_1, \dots, x_n \in A$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) et  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Alors

$$\langle y, x \rangle = \left\langle y, \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\rangle \stackrel{\text{bil.}}{=} \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle y, x_i \rangle = 0.$$

Comme  $\text{vect}(A)$  est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de  $A$ , on a montré que  $y \in \text{vect}(A)^\perp$ , donc que  $A^\perp \subset \text{vect}(A)^\perp$ .

La proposition est démontrée. ■

**Proposition 2.5**

Soient  $F, G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ . Alors

1.  $F \cap F^\perp = \{0\}$ .
2. Si  $F \subset G$ , alors  $G^\perp \subset F^\perp$ .
3.  $F \subset (F^\perp)^\perp$
4.  $F \subset G^\perp \iff G \subset F^\perp$ .

**Démonstration.**

On ne doit démontrer que le premier point, puisque les autres ne sont qu'une redite de la proposition 2.4 dans le cas particulier des sous-espaces vectoriels.

On sait déjà que  $F \cap F^\perp \subset \{0\}$ . Mais  $F$  et  $F^\perp$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ , donc ils contiennent tous les deux  $0$ , d'où l'égalité. ■

**Remarques.**

1. **(Facultative)** Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , le point 1 prouve que  $F$  et  $F^\perp$  sont en somme directe. Par contre, ils ne sont pas nécessairement supplémentaires. Par exemple si  $E = \mathbb{R}[X]$ ,  $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$  (prouvez que c'est un produit scalaire!! C'est un bon petit exo.), et  $F = \{P \in E \mid X|P\}$ , alors  $F^\perp = \{0\}$ . Vous verrez en spé que si  $F$  est un sous-espace vectoriel *complet* de  $E$ , alors  $F$  et  $F^\perp$  sont supplémentaires.
2. **(Facultative)** De même, on n'a pas nécessairement  $F = (F^\perp)^\perp$ . L'exemple précédent montre que  $(F^\perp)^\perp = E \neq F$ .
3. **(Facultative)** Voici un autre exemple :  $E = \mathcal{C}([-1, 1])$ ,  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$  et  $F = \{f \in E, f|_{[0,1]} = 0\}$ . Alors  $F^\perp = \{f \in E, f|_{[-1,0]} = 0\}$ , et  $F = (F^\perp)^\perp$ . Mais  $E \neq F \oplus F^\perp$  car  $F \oplus F^\perp = \{f \in E, f(0) = 0\}$ .

**Méthode 2.6 (Montrer qu'un vecteur est orthogonal à un sous-espace vectoriel)**

Pour montrer qu'un vecteur est orthogonal à un sous-espace vectoriel, il suffit de démontrer qu'il est orthogonal à une base de ce sous-espace vectoriel.

**Exemple.**

Dans  $\mathbb{R}^4$  muni du produit scalaire usuel, déterminez  $D^\perp$ , où  $D = \text{vect}((1, 1, 1, 1))$ . Soit  $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ . Alors

$$\begin{aligned} u \in D^\perp &\iff \langle u, (1, 1, 1, 1) \rangle = 0 \\ &\iff x + y + z + t = 0 \\ &\iff u = (x, y, z, -x - y - z) = x(1, 0, 0, -1) + y(0, 1, 0, -1) + z(0, 0, 1, -1), \end{aligned}$$

donc  $D^\perp = \text{vect}((1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1))$ .

**Définition 2.7 (Sous-espaces vectoriels orthogonaux)**

Deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  de  $E$  sont orthogonaux si

$$\forall x \in F, \quad \forall y \in G, \quad \langle x, y \rangle = 0.$$

**Remarques.**

1. Autrement dit,  $F$  et  $G$  sont orthogonaux si et seulement si  $F \subset G^\perp$  ou encore si et seulement si  $G \subset F^\perp$ .
2. On note  $F \perp G$ .

**Exemples.**

1. On a évidemment  $F \perp F^\perp$ .
2. Dans un exemple précédent, on a considéré l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré  $\leq 2$  muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{[-1,1]} fg.$$

L'orthogonal de la fonction constante égale à 1 est le sous-espace vectoriel

$$F = \{x \mapsto a + bx - 3ax^2, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Autrement dit,  $(\text{vect}(1))^\perp = F$  et  $F$  et  $\text{vect}(1)$  sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux.

**Définition 2.8 (Supplémentaire orthogonal)**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  tel que  $E = F \oplus F^\perp$ . Alors  $F^\perp$  est le **supplémentaire orthogonal** de  $F$ .

**Remarque.**

Attention, ce n'est pas toujours le cas! On peut avoir  $F \oplus F^\perp \neq E$ ! Dans ce cas,  $F$  n'admet pas de supplémentaire orthogonal.

**2.2 Familles orthogonales****Définition 2.9 (Familles orthogonales - orthonormales)**

1. Une famille de vecteurs de  $E$  est **orthogonale** si les vecteurs sont orthogonaux deux à deux.
2. Une famille de vecteurs de  $E$  est **orthonormale** si elle est orthogonale et si tous les vecteurs sont de norme 1.

**Remarques.**

1. Une famille  $(x_i)_{i \in I}$  est donc orthogonale si  $\forall i, j \in I, i \neq j, \langle x_i, x_j \rangle = 0$ .
2. Une famille  $(x_i)_{i \in I}$  est donc orthonormale si  $\forall i, j \in I, \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$ .

**Proposition 2.10 (Théorème de Pythagore)**

Soient  $x, y \in E$ . Alors  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff x \perp y$ .

**Démonstration.**

D'après la proposition 1.8, on a

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x, y \rangle,$$

d'où l'équivalence. ■

**Proposition 2.11**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $X = (x_1, \dots, x_n)$  une famille orthogonale de vecteurs de  $E$ . Alors  $\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$ .

**Démonstration.**

On a

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{j=1}^n x_j \right\rangle \stackrel{\text{bil.}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_i, x_j \rangle \stackrel{\text{fam. orth.}}{=} \sum_{i=1}^n \langle x_i, x_i \rangle = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

■

**Remarques.**

1. Notez dans la démonstration comment on utilise la bilinéarité pour développer le produit scalaire. Si vous ne voyez pas bien, essayez  $\langle x_1 + x_2, x_1 + x_2 \rangle$ .
2. La réciproque au théorème de pythagore est fausse si  $n \geq 3$ . Par exemple dans  $\mathbb{R}^2$ , l'égalité du théorème signifie que

$$\langle x, y \rangle + \langle y, z \rangle + \langle z, x \rangle = 0.$$

En prenant par exemple  $x = (1, 0)$ ,  $y = (1, 1)$ ,  $z = (1, -3)$ , on a l'égalité, mais la famille n'est pas orthogonale.

**Proposition 2.12 (Indépendance linéaire d'une famille orthogonale)**

Une famille orthogonale de vecteurs **tous non nul** est libre. En particulier, une famille orthonormale est libre.

**Démonstration.**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $X = (x_1, \dots, x_n)$  une famille orthogonale de vecteurs de  $E$  tous non nuls. Soient alors  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0.$$

Pour un  $j \in \{1, \dots, n\}$ , on a

$$0 = \langle x_j, 0 \rangle = \left\langle x_j, \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\rangle \stackrel{\text{bil.}}{=} \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x_j, x_i \rangle \stackrel{\text{fam. orth.}}{=} \lambda_j \langle x_j, x_j \rangle = \lambda_j \|x_j\|^2.$$

Comme  $x_j \neq 0$ , ceci implique  $\lambda_j = 0$ , et ceci pour tout  $j$ , donc la famille est libre. ■

### 3 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie

#### Proposition 3.1

Soit  $x \in E$  non nul. Alors  $E = x^\perp \oplus \text{vect}(x)$ .

#### Démonstration.

Par la proposition 2.5(1), on sait que  $x^\perp \cap \mathbb{R}x = \{0\}$ . Il reste donc à démontrer que tout vecteur de  $E$  est somme d'un vecteur proportionnel à  $x$  et d'un vecteur orthogonal à  $x$ . Soit  $y \in E$ . Supposons qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $z$  orthogonal à  $x$  tel que  $y = \lambda x + z$ . Alors

$$\langle x, y \rangle = \langle x, \lambda x + z \rangle \stackrel{\text{bil.}}{=} \lambda \langle x, x \rangle + \langle x, z \rangle \stackrel{\text{def. } z}{=} \lambda \|x\|^2,$$

donc, comme  $x \neq 0$ ,

$$\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2}$$

On en déduit que

$$z = y - \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2} x.$$

Réciproquement, si on définit  $\lambda$  et  $z$  comme ci-dessus, on a bien sûr  $y = \lambda x + z$  et

$$\langle x, z \rangle = \langle x, y - \lambda x \rangle = \langle x, y \rangle - \lambda \|x\|^2 = 0,$$

donc  $z \in x^\perp$ , ce qui prouve la proposition. ■

#### Théorème 3.2

Tout espace vectoriel euclidien admet une base orthonormale.

#### Démonstration.

On raisonne par récurrence sur la dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ . Si  $n = 1$ , alors  $E = \mathbb{R}x$  pour un certain  $x \neq 0$ , et  $(x/\|x\|)$  est une base orthonormale.

Supposons alors le résultat vrai pour un  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $E$  euclidien de dimension  $n + 1$ . Soit  $x \in E$ ,  $x \neq 0$ . Alors  $E = x^\perp \oplus \mathbb{R}x$  par 3.1. Or,  $x^\perp$  est un espace euclidien de dimension  $n$ , donc par hypothèse de récurrence, il admet une base orthonormale  $(e_1, \dots, e_n)$ . Mais pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $\langle x, e_i \rangle = 0$ , donc  $(e_1, \dots, e_n, x/\|x\|)$  est une base orthonormale de  $E$ . ■

#### Corollaire 3.3

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ . Alors  $F$  admet une base orthonormale.

#### Démonstration.

Un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$  est un espace euclidien, auquel on peut appliquer le théorème 3.2. ■

**Théorème 3.4 (Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie)**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel **de dimension finie** de  $E$ . Alors  $E = F \oplus F^\perp$ .

**Démonstration.**

(**Facultative.**) On sait déjà que  $F \cap F^\perp = \{0\}$  (proposition 2.5(1)). Il reste donc à montrer que  $E = F + F^\perp$ . Soit  $n = \dim(F)$ , et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormale de  $F$ . On raisonne par analyse-synthèse. Soit  $x \in E$ , et supposons qu'il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ , et  $z \in F^\perp$ , tels que

$$x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k + z.$$

Fixons  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On a alors

$$\langle x, e_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k + z, e_i \right\rangle \stackrel{\text{bil.}}{=} \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle e_k, e_i \rangle + \langle z, e_i \rangle \stackrel{\text{bon}}{=} \lambda_i + \langle z, e_i \rangle \stackrel{\text{def. } z}{=} \lambda_i.$$

Réciproquement, définissons les  $\lambda_i$  par  $\lambda_i = \langle x, e_i \rangle$ , et

$$z = x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k.$$

Pour prouver le théorème, il suffit de prouver que  $z \in F^\perp$ . Or,

$$z \in F^\perp \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k = \langle x, e_i \rangle$$

(méthode 2.6). Or, pour  $i = 1, \dots, n$ , on a

$$\langle z, e_i \rangle = \left\langle x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k, e_i \right\rangle \stackrel{\text{bil.}}{=} \langle x, e_i \rangle - \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle e_k, e_i \rangle \stackrel{\text{bon}}{=} \langle x, e_i \rangle - \lambda_i = 0,$$

et donc  $E = F + F^\perp$ . ■

**Méthode 3.5**

Cette démonstration illustre une technique générale à connaître. Lorsqu'on a une combinaison linéaire  $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0$ , faire un produit scalaire de cette relation avec un vecteur  $y$  "bien choisi" peut donner des informations intéressantes (par exemple un  $y$  dans un orthogonal..).

Notez aussi l'utilisation de la bilinéarité dans ces démonstrations. Cela doit être absolument maîtrisé!

**Corollaire 3.6**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel **de dimension finie** de  $E$ . Alors  $F = (F^\perp)^\perp$ .

**Démonstration.**

On sait déjà que  $F \subset (F^\perp)^\perp$  (proposition 2.5(2)).

Réciproquement, si  $z \in (F^\perp)^\perp$ , il existe  $x \in F$  et  $y \in F^\perp$  tels que  $z = x + y$  (théorème 3.4). Or,  $\langle z, y \rangle = 0$  et  $\langle x, y \rangle = 0$ , donc

$$\langle y, y \rangle = \langle z - x, y \rangle = \langle z, y \rangle - \langle x, y \rangle = 0,$$

donc  $y = 0$  (le produit scalaire est défini positif) et  $z = x \in F$ . ■

## 4 Espaces vectoriels euclidiens

Dans ce paragraphe,  $E$  est un espace vectoriel euclidien : il est donc de dimension finie, et on note  $n \in \mathbb{N}^*$  sa dimension.

Dans toute la suite, on fixe un espace vectoriel euclidien  $E$ .

### **Théorème 4.1 (Existence d'une base orthonormale dans le cas euclidien)**

1. Tout espace vectoriel euclidien admet une base orthonormale (donc en particulier une base orthogonale).
2. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls d'un espace vectoriel euclidien peut être complétée en une base orthogonale.

#### **Démonstration.**

L'existence d'une base orthonormale est une redite du théorème 3.2. Pour le deuxième point, si  $X$  est une telle famille de  $E$ , on considère le sous-espace vectoriel  $F = \text{vect}(X)$  dont  $X$  est une base orthogonale. Comme  $E = F \oplus F^\perp$ , il suffit de choisir une base orthogonale de  $F^\perp$  (qui existe d'après le 1), dont l'union avec  $X$  forme une base orthogonale de  $E$  qui complète  $X$ . ■

### **Théorème 4.2 (Supplémentaire orthogonal)**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors

1.  $E = F \oplus F^\perp$
2.  $F = (F^\perp)^\perp$

#### **Démonstration.**

C'est une conséquence du théorème 3.4 et du corollaire 3.6, puisque  $F$  est de dimension finie. ■

### **Méthode 4.3 (Procédé d'orthonormalisation de Schmidt)**

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On veut construire une base orthonormale  $(u_1, \dots, u_n)$  de  $E$  telle que

$$\forall p = 1, \dots, n, \text{vect}(u_1, \dots, u_p) = \text{vect}(e_1, \dots, e_p).$$

On construit cette famille  $(u_p)_{1 \leq p \leq n}$  par récurrence sur  $p$ .

1. On définit  $u_1$  par  $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ .
2. Supposons alors  $u_1, \dots, u_p$  construits pour un  $p < n$ . Soit  $u'_{p+1}$  le vecteur défini par

$$u'_{p+1} = e_{p+1} - \sum_{i=1}^p a_i u_i,$$

où  $a_i = \langle e_{p+1}, u_i \rangle$ ,  $i = 1, \dots, p$ . On a alors pour  $i = 1, \dots, p$ ,

$$\langle u'_{p+1}, u_i \rangle = \langle e_{p+1}, u_i \rangle - \sum_{k=1}^p a_k \langle u_k, u_i \rangle = \langle e_{p+1}, u_i \rangle - a_i \langle u_i, u_i \rangle = \langle e_{p+1}, u_i \rangle - a_i = 0$$

donc la famille  $\{u_1, \dots, u_p, u'_{p+1}\}$  est orthogonale et on pose  $u_{p+1} = \frac{u'_{p+1}}{\|u'_{p+1}\|}$ .

**Remarques.**

1. On verra que  $u'_{p+1}$  est la projection orthogonale de  $e_{p+1}$  sur  $(\text{vect}(e_1, \dots, e_p))^\perp$ , cf. la proposition 5.4.
2. Comme

$$\text{vect}(u_1, \dots, u_p) = \text{vect}(e_1, \dots, e_p)$$

par hypothèse, la définition de  $u'_{p+1}$  prouve que ce vecteur est combinaison linéaire de  $e_1, \dots, e_{p+1}$ , donc

$$\text{vect}(u_1, \dots, u_p, u'_{p+1}) \subset \text{vect}(e_1, \dots, e_{p+1}).$$

De même, comme

$$e_{p+1} = u'_{p+1} + \sum_{i=1}^p a_i u_i,$$

on a également l'inclusion dans l'autre sens, donc l'égalité

$$\text{vect}(u_1, \dots, u_p, u'_{p+1}) = \text{vect}(e_1, \dots, e_{p+1}).$$

Ceci prouve en particulier que  $u'_{p+1} \neq 0$ .

**Exemple.**

Dans  $\mathbb{R}^3$  muni du produit scalaire usuel, on pose  $e_1 = (1, 1, 2)$ ,  $e_2 = (2, 0, 2)$  et  $e_3 = (0, 3, 1)$ . On applique le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à ces vecteurs. On pose

$$u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2).$$

Puis

$$u'_2 = e_2 - (e_2|u_1)u_1 = (2, 0, 2) - \frac{1}{6}(2 \times 1 + 0 \times 1 + 2 \times 2)(1, 1, 2) = (2, 0, 2) - (1, 1, 2) = (1, -1, 0),$$

et

$$u_2 = \frac{u'_2}{\|u'_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1, 0).$$

Enfin,

$$\begin{aligned} u'_3 &= e_3 - (e_3|u_1)u_1 - (e_3|u_2)u_2 = e_3 - \frac{1}{6}(0 \times 1 + 3 \times 1 + 1 \times 2)(1, 1, 2) \\ &\quad - \frac{1}{2}(0 \times 1 + 3 \times (-1) + 1 \times 0)(1, -1, 0) = \frac{2}{3}(1, 1, -1), \end{aligned}$$

donc

$$u_3 = \frac{u'_3}{\|u'_3\|} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, -1).$$

**Proposition 4.4 (Composantes dans une base orthonormale)**

Soit  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base orthonormale de  $E$ , et  $x, y \in E$ , et

$$X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Alors

1. Les composantes de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} \langle x, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, e_n \rangle \end{pmatrix},$$

*i.e.*  $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$ , ou encore  $x_i = \langle x, e_i \rangle$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .

2.  $\langle x, y \rangle = {}^tXY = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ .

3.  $\|x\|^2 = {}^tXX = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2$ .

**Démonstration.**

1. On a  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ , donc pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\langle x, e_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n x_k e_k, e_i \right\rangle \stackrel{\text{bil.}}{=} \sum_{k=1}^n x_k \langle e_k, e_i \rangle = x_i \|e_i\|^2 = x_i$$

puisque la famille  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une famille orthonormale.

2. On a

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n x_k e_k, \sum_{k=1}^n y_k e_k \right\rangle \stackrel{\text{bil.}}{=} \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle \stackrel{\text{bon}}{=} \sum_{i=1}^n x_i y_i \|e_i\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

3. Découle du 2 puisque  $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ .

La proposition est démontrée. ■

**Méthode 4.5**

Dans le cas d'une base orthogonale  $(e_1, \dots, e_n)$  seulement, le résultat tombe en défaut. On pourra cependant utiliser le fait que la base  $(e_i/\|e_i\|)_{1 \leq i \leq n}$  est orthonormale et travailler avec cette nouvelle base.

**Exemple.**

Dans  $\mathbb{R}^3$  muni du produit scalaire canonique, les vecteurs

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1)$$

forment une base orthonormale. Si  $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , on a

$$v = x e_1 + y e_2 + z e_3 = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \langle v, e_3 \rangle e_3.$$

## 5 Projections et symétries orthogonales, distance

Dans tout ce paragraphe,  $E$  est un espace vectoriel préhilbertien réel, et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie  $p$ . On rappelle que  $E = F \oplus F^\perp$ , que  $F = (F^\perp)^\perp$  et que  $E = F^\perp \oplus (F^\perp)^\perp$ . En particulier, tous les résultats qui suivent sont valables si  $E$  est euclidien.

## 5.1 Projections et symétries orthogonales

### Définition 5.1 (Projections et symétries orthogonales)

1. La **projection orthogonale** sur  $F$  est la projection sur  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ .
2. La **symétrie orthogonale** par rapport à  $F$  est la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ .
3. Une **réflexion** est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

### Proposition 5.2

Avec les notations précédentes, on a

$$\begin{aligned} F &= \text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{id}) = \text{Ker}(s - \text{id}) \\ F^\perp &= \text{Ker}(s + \text{id}) = \text{Ker}(p) \\ \forall x \in E, x - p(x) &\in F^\perp \end{aligned}$$

### Démonstration.

Ce sont simplement les résultats sur les projections et les symétries, en ajoutant ici les définitions de projections et symétries orthogonales.

Puis si  $x \in E$ , on a  $p(x - p(x)) = p(x) - p \circ p(x) = 0$  car  $p$  est une projection, donc  $x - p(x) \in \text{Ker}(p) = F^\perp$ .

■

### Proposition 5.3

Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$  et  $s = 2p - \text{id}_E$ . Alors  $p$  est une projection orthogonale si et seulement si  $s$  est une symétrie orthogonale.

### Démonstration.

**Facultative.** On a vu que  $p$  est une projection si et seulement si  $s = 2p - \text{id}_E$  est une symétrie. Supposons alors que  $p$  soit une projection et donc  $s$  une symétrie. Rappelons alors que  $p$  est la projection sur  $\text{Im}(p)$  et parallèlement à  $\text{ker}(p)$ , que  $s$  est la symétrie par rapport à  $\text{ker}(s - \text{id}_E)$  et parallèlement à  $\text{ker}(s + \text{id}_E)$ , et que

$$\text{Im}(p) = \text{ker}(p - \text{id}_E) = \text{Im}(p - \text{id}_E), \quad \text{Ker}(p) = \text{Ker}(s + \text{id}_E).$$

Or,  $p$  est une projection orthogonale si et seulement si  $\text{Ker}(p) = (\text{Im}(p))^\perp$ , ou encore si et seulement si  $\text{Ker}(s + \text{id}) = (\text{Ker}(s - \text{id}))^\perp$ , donc si et seulement si  $s$  est une symétrie orthogonale. ■

### Proposition 5.4 (Expression d'une projection orthogonale dans une base orthonormale)

Soient  $p$  la projection orthogonale sur  $F$  et  $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$  une base orthonormale de  $F$ . Alors, pour tout  $x \in E$ , on a

$$p(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i.$$

### Démonstration.

**Facultative.** Soit  $x \in E$ . Comme  $p(x) \in F$ , d'après la proposition 4.4 appliqué à l'espace euclidien  $F$  et la base orthonormale  $(e_1, \dots, e_p)$ , on a

$$p(x) = \sum_{i=1}^p \langle p(x), e_i \rangle e_i.$$

Or,  $x - p(x) \in F^\perp$ , pour tout  $i = 1, \dots, p$ , comme  $e_i \in F$ , on a  $\langle x, e_i \rangle = \langle p(x), e_i \rangle$ , d'où la formule de l'énoncé. ■

**Méthode 5.5 (Déterminez l'expression analytique d'une projection orthogonale)**

On donne un espace vectoriel euclidien  $E$ , et un sous-espace vectoriel  $F$ . On veut déterminer les composantes de  $p(x)$ , où  $p$  est la projection orthogonale sur  $F$ , en fonction de celles de  $x \in E$ . Pour cela, on résout le système  $y \in F$  et  $x - y \in F^\perp$  d'inconnue  $y$ . L'unique solution  $y$  est  $p(x)$ .

**Exemples.**

1. Soit  $E$  un espace euclidien  $E$  de dimension 4, muni d'une base orthonormale  $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$   $F = \text{vect}(e_1, e_3 + e_2)$ . Déterminez l'expression analytique de la projection orthogonale  $p$  sur  $F$ , et de la symétrie orthogonale  $s$  par rapport à  $F$ .

Soit  $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_B \in E$  et  $(x, y, z, t)$  Déterminons les composantes  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}_B$  de  $p(u)$  dans la base  $B$ . Soit

$v \in F$ . Alors il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $v = ae_1 + b(e_2 + e_3) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ b \\ 0 \end{pmatrix}_B$ . On a alors  $u - v = \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \\ z - b \\ t \end{pmatrix}_B$ , et

donc :

$$\begin{aligned} v = p(u) &\iff u - v \in F^\perp \\ &\iff_{\text{base de } F} \langle u - v, e_1 \rangle = \langle u - v, e_2 + e_3 \rangle = 0 \\ &\iff_{B\text{bon}} x - a = y - b + z - b = 0 \\ &\iff_{\text{inconnues } a, b} \begin{cases} a = x \\ b = \frac{y+z}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

et donc  $p(u) = \begin{pmatrix} x \\ \frac{y+z}{2} \\ \frac{y+z}{2} \\ 0 \end{pmatrix}_B$ , et l'expression analytique de  $p$  est  $\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{y}{2} + \frac{z}{2} \\ z' = \frac{y}{2} + \frac{z}{2} \\ t' = 0 \end{cases}$ . Pour obtenir celle de  $s$ , on écrit

simplement que  $s(x) = 2p(x) - x$ , donc l'expression analytique de  $s$  est  $\begin{cases} x' = x \\ y' = z \\ z' = y \\ t' = -t \end{cases}$ .

2. Voici un petit exercice! On considère un espace euclidien  $E$  de dimension 3 muni d'une base orthonormale  $B = (e_1, e_2, e_3)$ . Déterminez l'expression analytique de la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel  $F = \{xe_1 + ye_2 + ze_3 \mid x + 2y - z = 0\}$ . Déterminez d'abord une base de  $F$ ! On obtient

$$\begin{cases} x' = \frac{5}{6}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z \\ y' = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z \\ z' = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{5}{6}z \end{cases}$$

## 6 Distance à un sous-espace vectoriel

### Définition 6.1 (Distance, distance à un sous-espace vectoriel)

Soient  $x, y \in E$ .

1. La **distance de  $x$  à  $y$**  est le réel  $d(x, y) = \|x - y\|$ .
2. La **distance de  $x$  au sous-espace vectoriel  $F$**  est le réel  $d(x, F) = \inf_{z \in F} d(x, z) = \inf_{z \in F} \|x - z\|$ .

### Remarque.

La distance de  $x$  à  $F$  est bien définie. En effet, l'ensemble  $A = \{\|x - z\|, z \in F\}$  est non vide puisque  $0 \in F$  donc  $\|x\| \in A$ . De plus,  $A \subset \mathbb{R}^+$ , donc  $A$  est un sous-ensemble non vide de  $\mathbb{R}$  minoré : il admet une borne inférieure.

### Proposition 6.2 (Expression de la distance à un sous-espace vectoriel)

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$  et  $p$  la projection orthogonale sur  $F$ . Soit  $x \in E$ . Alors

$$d(x, F) = \|x - p(x)\|,$$

et pour tout  $y \in F$ , si  $y \neq p(x)$ , on a  $\|x - y\| = d(x, y) > d(x, F)$ .

### Démonstration.

Soit  $y \in F$ . Alors  $x - y = (x - p(x)) + (p(x) - y)$  et  $x - p(x) \in F^\perp$  (proposition ??), et  $p(x) - y \in F$ . On en déduit que  $x - p(x)$  et  $p(x) - y$  sont orthogonaux, donc d'après le théorème de pythagore, on a

$$\|x - y\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - y\|^2.$$

Ceci prouve que si  $y \neq p(x)$ , alors  $\|x - y\| > \|x - p(x)\|$ . Comme de plus  $p(x) \in F$ , on a le résultat voulu. ■

