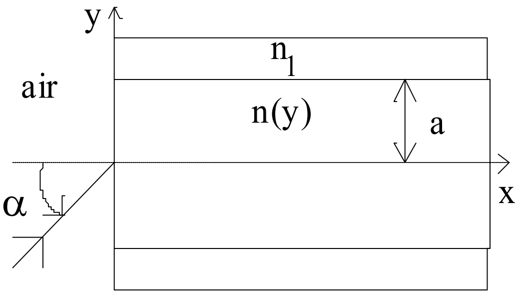
1.1 Optique géométrique-Exercice 12

On considère une fibre optique cylindrique ayant la structure ci-contre.
Soit un rayon lumineux d'incidence α.



a-On suppose que pour le cœur de la fibre : $n(y) = n_0 > n_1$

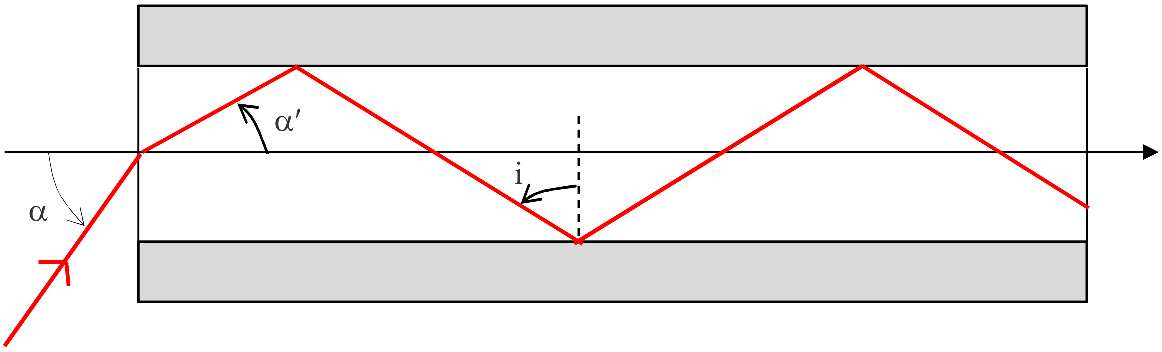
- Tracer le trajet du rayon lumineux
- A quelle condition sur α n'y a-t-il pas de pertes ?
- Que se passe-t-il si la fibre fait un coude marqué ?

b-On a désormais : $n(y) = n_0\sqrt{1-\left(\frac{ky}{a}\right)^2}$. Déterminer k pour que n soit continu en a.

Montrer que la trajectoire du rayon vérifie : $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = An^2 - 1$. Résoudre l'équation.

---

a-• La lumière est guidée par une succession de réflexions sur le dioptre n_0/n_1.



• Pour qu'il n'y ait pas de pertes, il faut que les réflexions soient totales : $i > i_{lim} = \mathrm{Arc}\sin\left(\frac{n_1}{n_0}\right)$ => $\sin i > \frac{n_1}{n_0}$

Or $i = \frac{\pi}{2} - \alpha'$ donc : $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha') > \frac{n_1}{n_0}$ => $\cos(\alpha') > \frac{n_1}{n_0}$

Loi de Descartes de la réfraction à l'entrée : $\sin\alpha = n_0 \sin\alpha'$ => $\alpha' = \mathrm{Arc}\sin(\frac{\sin\alpha}{n_0})$

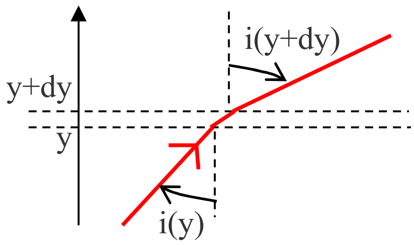
La condition sur α est donc : $\cos(\mathrm{Arc}\sin(\frac{\sin\alpha}{n_0})) > \frac{n_1}{n_0}$

Or $\cos^2(\mathrm{Arc}\sin(\frac{\sin\alpha}{n_0})) + \sin^2(\mathrm{Arc}\sin(\frac{\sin\alpha}{n_0})) = 1$ => $\cos^2(\mathrm{Arc}\sin(\frac{\sin\alpha}{n_0})) = 1 - \frac{\sin^2\alpha}{n_0^2}$

La condition peut se réécrire : $1 - \frac{\sin^2\alpha}{n_0^2} > \frac{n_1^2}{n_0^2}$ soit finalement : $\boxed{\sin\alpha < \sqrt{n_0^2 - n_1^2}}$

• Si la fibre est courbée, l'angle i va diminuer et il risque de devenir inférieur à i_{lim}. Il n'y aura plus réflexion totale et le rayon va sortir de la fibre.

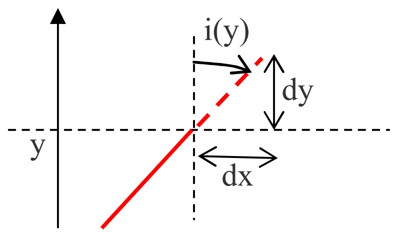
b-• On veut $n(a) = n_1$ donc $n_0\sqrt{1-k^2} = n_1$ d'où $k = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2}$



• La fine tranche de cœur entre y et y+dy joue le rôle de dioptre entre des milieux d'indices n(y) et n(y+dy).
Donc : $n(y)\sin i(y) = n(y+dy)\sin i(y+dy)$

On en déduit $\boxed{n(y)\sin i(y) = \text{constante} = C}$

Or : $\sin i(y) = -\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$ (i < 0 sur la figure)



$n^2(y)\sin^2 i(y) = C^2$ => $\frac{n^2(y)}{C^2} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

=> $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = An^2(y) - 1$ avec $A = \frac{1}{C^2}$

Donc : $\boxed{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{n_0^2}{C^2}\left(1 - \left(\frac{ky}{a}\right)^2\right)}$

On dérive par rapport à x : $2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} = -2An_0^2\frac{k^2}{a^2}y\frac{dy}{dx}$ => $\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + An_0^2\frac{k^2}{a^2}y = 0}$

Equation d'un oscillateur harmonique => y est une fonction sinusoïdale de x. Le rayon est sinusoïdal.