
ALGÈBRE
Épreuves orales

I. RÉDUCTION

1 CCINP MP (*exercice 68*)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Démontrer que A est diagonalisable de trois manières :
 - sans calcul,
 - en déterminant les éléments propres,
 - en calculant A^2 .
- Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à A .
Trouver une base orthonormée de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est diagonale.

2 CCINP/Mines-Ponts

Soit n un entier strictement positif et M une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui vérifie $M^2 + M^T = I_n$.

- On suppose que M est symétrique.
Montrer que M est diagonalisable et que $\text{tr}(M) \times \det(M) \neq 0$.
- On ne suppose plus M symétrique. Montrer que M est diagonalisable.
- Montrer que M est inversible si et seulement si 1 n'est pas une valeur propre de M .

3 Mines-Ponts

Soit $n \geq 2$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

4 Centrale

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de coefficients $a_{ij} > 0$ vérifiant $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$.

Montrer que 1 est valeur propre de A .

Montrer que toutes les valeurs propres de A sont de module au plus égal à 1 et que 1 est la seule dont le module vaut 1.

5 Mines-Télécom

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'endomorphisme $f : P \mapsto P - P'$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

- Montrer que f est bijectif.
- Étudier la diagonalisabilité de f .

6 Mines-Ponts

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer que A et B ont au moins un vecteur propre commun.

7 ENS

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\Delta : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto AM + MB$.

1. On suppose que A et B sont diagonalisables. Montrer que Δ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.
2. On suppose que A et B sont nilpotentes. Montrer que Δ est nilpotente. Que peut-on dire sur l'indice de nilpotence de Δ en fonction de ceux de A et B ?

8 Centrale

1. On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de J .

2. Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. En déduire la valeur du déterminant $D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$.

9 Centrale

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée, résoudre l'équation $X + X^T = \text{tr}(X)A$.

10 CCINP / Mines-Ponts

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ où $j = e^{2i\pi/3}$. On note φ l'endomorphisme canoniquement associé.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de \mathbb{C}^3 telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 de dimension 2.
Montrer que F est stable par φ si et seulement si $e_1 \in F$.
Déterminer tous les sous-espaces de \mathbb{R}^3 stables par φ .
4. Donner la dimension de $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}), AM = MA\}$.

11 Mines-Ponts

Soit f un endomorphisme d'un E espace vectoriel. On suppose que f^2 est diagonalisable. On veut montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.

1. Montrer le sens direct.
2. On note λ une valeur propre non nulle de f^2 , μ_1 et μ_2 ses racines.
Montrer que $\text{Ker}(f^2 - \lambda \text{Id}) = \text{Ker}(f - \mu_1 \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - \mu_2 \text{Id})$.
Conclure.

12 CCINP

On note u l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de \mathbb{C}^3 .

1. Calculer le rang de $A - I_3$ et en déduire que A n'est pas diagonalisable.
2. Déterminer $\text{Ker}(u - 2\text{Id})$ et $\text{Ker}(u - \text{Id})^2$ et montrer que ces sous-espaces sont supplémentaires.
3. Soit $n \geq 2$. Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $X^n = A$.
On note v l'endomorphisme canoniquement associé à X .

(a) Montrer que u et v commutent et en déduire que $\text{Ker}(u - 2\text{Id})$ et $\text{Ker}(u - \text{Id})^2$ sont stables par v .

(b) Montrer que X est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ avec $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

(c) Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $YJ = JY$ et en déduire que $Y \in \text{Vect}(I_2, J)$.

(d) Résoudre $X^n = A$.

13 CCINP

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie non nulle.

Soit u et v deux endomorphismes de E , non nuls.

On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $u^2 = ku$ et $v^2 = kv$.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que u soit bijectif.
2. (a) Montrer que $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u - k\text{Id}_E)$.
(b) On suppose que $u \neq k\text{Id}_E$.
Montrer que u est diagonalisable. Quelles sont les valeurs propres de u ? Quels sont les sous-espaces propres associés?
3. Montrer que $\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = E$.
4. On suppose que $u \circ v = v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
(a) Montrer que $\text{Ker}(u + v) = \text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v)$.
(b) Montrer que $\text{Im}(u + v) = \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$.
5. Montrer que $(u + v)^2 = k(u + v) \Leftrightarrow u \circ v = v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
6. Montrer que si $u \circ v = v \circ u$ alors $\text{Im}(u \circ v) = \text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)$ et $\text{Ker}(u \circ v) = \text{Ker}(u) + \text{Ker}(v)$.

II. ESPACES EUCLIDIENS

14 CCINP MP (exercice 92)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n .

On pose : $\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ où tr désigne la trace et A^T désigne la transposée de la matrice A .

1. Prouver que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

2. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E .
On admet que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E .
- Prouver que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
 - Prouver que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E . Déterminer F^\perp .

15 CCINP MP (exercice 81)

On définit sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \text{tr}(A^\top A')$.

On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

- Montrer que \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Déterminer une base de \mathcal{F}^\perp .
- Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur \mathcal{F}^\perp .
- Calculer la distance de J à \mathcal{F} .

16 CCINP MP (exercice 76)

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \forall x \in [a, b], f(x) > 0\}$.

Prouver que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt, f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m .

17 CCINP

Dans \mathbb{R}^3 , on considère p la projection orthogonale sur le plan \mathcal{P} d'équation $x + y + z = 0$.

Déterminer la matrice de p dans la base canonique, puis celle de la symétrie orthogonale par rapport à \mathcal{P} .

18 Mines-Ponts

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{C}_A = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle Ax, x \rangle = 0\}$.

- Dans cette question, on prend $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer l'ensemble \mathcal{C}_A .

- Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.
 - $\mathcal{C}_A = \text{Ker} A$
 - \mathcal{C}_A est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n
 - $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ ou $-A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

19 Mines-Ponts

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle telle que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T A X \geq 0$.

Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $PAP^T = \begin{pmatrix} I_k & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$.

20 Centrale

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique, à valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ toutes strictement positives.

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $(t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que

$$t_1 + \dots + t_n = 1 \text{ alors } \varphi\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n t_k \varphi(x_k).$$

(b) Montrer que $\sum_{i=1}^n \varphi(a_{i,i}) \leq \sum_{i=1}^n \varphi(\lambda_i)$.

(c) En déduire que $\det(A) \leq \prod_{i=1}^n a_{i,i}$.

2. Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que

$$|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^n \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2}.$$

On supposera dans la suite que cette inégalité est aussi valable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3. On note D la boule fermée de rayon 1 dans \mathbb{C} .

Montrer que pour tout $(z_1, \dots, z_n) \in D^n$, $\prod_{1 \leq i < j \leq n} |z_j - z_i| \leq n^{n/2}$.

21 CCINP

1. Montrer que $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de f , endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé

$$\text{à } M = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 8 \\ 4 & 7 & 4 \\ 8 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $v_1 = \frac{1}{\alpha} u_1$, $v_2 = \frac{1}{\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ et $v_3 = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ c \end{pmatrix}$ forment une base orthonormée de \mathbb{R}^3 .

3. On note H la droite dirigée par v_1 .

Calculer $\langle f(v_2), v_1 \rangle$ et $\langle f(v_3), v_1 \rangle$ et montrer que H^\perp est stable par f .

4. Montrer que dans la base (v_1, v_2, v_3) , f a pour matrice $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 4\sqrt{2} \\ 0 & -4\sqrt{2} & 7 \end{pmatrix}$.

5. Montrer que M n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

6. En étudiant $f \circ r_1$ où r_1 est la réflexion par rapport au plan engendré par v_1 et v_3 , montrer que f est la composée de deux symétries.

7. Montrer que f ne peut pas être la composée de deux réflexions.

22 CCINP1. Soit $a \in \mathbb{R}^*$.Soit f_a l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont M_a est la représentation matricielle dans la base canonique :

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 2a+1 & -a \\ 4a & 4a & -2a+1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer $\det(M_a)$. En déduire que f_a est bijectif.
 (b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés de f_a .
 L'endomorphisme f_a est-il diagonalisable ?
 (c) Montrer que $\text{Ker}(f_a - Id)$ est un plan de \mathbb{R}^3 .
 Montrer que $\text{Im}(f_a - Id)$ est inclus dans $\text{Ker}(f_a - Id)$.

2. Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$.Soient u et v des vecteurs de E avec u et v non nuls.

$$\text{Soit } f : \begin{array}{l} E \rightarrow E \\ x \mapsto x + \langle x, v \rangle u. \end{array}$$

- (a) Montrer que f est un endomorphisme de E .
 (b) Montrer que $\text{Ker}(f - Id)$ est de dimension $n - 1$ et déterminer $\text{Im}(f - Id)$.
 (c) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés de f .
 L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
 (d) Montrer que : f bijective $\Leftrightarrow \langle u, v \rangle \neq -1$.
 Dans le cas f bijective, calculer f^{-1} .
 (e) On suppose $u \perp v$.
 Montrer que $\text{Im}(f - Id)$ est inclus dans $\text{Ker}(f - Id)$.

$$\text{Montrer que la matrice de } f \text{ dans une certaine base peut s'écrire : } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. On définit une transvection par les deux conditions :

- $\text{Im}(f - Id)$ est inclus dans $\text{Ker}(f - Id)$
- $\text{Ker}(f - Id)$ est un sous-espace de dimension $n - 1$.

Montrer que toute transvection peut se représenter matriciellement sous la forme de la question précédente.

23 ESPCISoit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ telle que $\forall M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), f(M) \geq 0$.Montrer que f est une combinaison linéaire des formes linéaires $\varphi_X : M \mapsto X^T M X$ avec $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, avec des scalaires positifs.

III. DIVERS

24 CCINP MP (exercice 60)Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$ et une base de $\text{Ker}(f)$.
2. f est-il surjectif ?
3. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$?

25 CCINP MP (exercice 90)

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Soit a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts de \mathbb{K} .

1. Montrer que $\Phi : \begin{matrix} \mathbb{K}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \mapsto & (P(a_1), P(a_2), P(a_3)) \end{matrix}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{K}^3 et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\}, L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
 - (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
 - (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3 .
3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) .
4. *Application* : On se place dans \mathbb{R}^2 muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1), B(1, 3)$ et $C(2, 1)$.
Déterminer une fonction polynômiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C .

26 CCINP

Soit E un espace vectoriel de dimension n , F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Ker}u = F$ et $\text{Im}u = G$ si et seulement si $\dim F + \dim G = n$.

27 CCINP

Soit E un espace vectoriel de dimension n (où $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$).

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on pose $f^0 = \text{id}_E$ et $\forall k \in \mathbb{N}, f^k = f \circ f^{k-1}$.

On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est un *endomorphisme cyclique* s'il existe $e_1 \in E$ tel que $(e_1, f(e_1), \dots, f^{n-1}(e_1))$ est une base de E .

1. On suppose ici $n = 3$. On note \mathcal{B} une base de E .
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.
Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f^2)$. En déduire que f est cyclique.
2. On considère dans cette question $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $f : P \mapsto P(X+1) - P(X)$.
 - (a) Soit $Q \in E$ tel que $\deg(Q) \geq 1$. Montrer que $\deg(f(Q)) = \deg(Q) - 1$.
En déduire que f n'est pas bijectif.
 - (b) L'endomorphisme f est-il cyclique ? (*Indication* : Calculer $\deg(f^j(X^k))$.)
3. On suppose ici que $\text{Ker}(f^{n-1}) \neq E$ et $\text{Ker}(f^n) = E$.
 - (a) Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$.
 - (b) Montrer que f est cyclique.
4. On suppose ici que f est cyclique. Montrer que ses sous-espaces propres sont de dimension 1.
5. On suppose ici que f est diagonalisable. Montrer que f est cyclique si et seulement si ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

28 CCINP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P = nX^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \dots - X - 1$ et $Q = (n+1)X^n - nX^{n+1} - 1$.

1. Montrer que P et Q possèdent les mêmes racines.
2. Montrer que toutes les racines de P sont simples.

29 CCINP MP (exercice 84)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Donner, en justifiant, les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

30 CCINP MP (exercice 89)

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

1. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.

2. On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

31 Mines-Ponts

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et A^T sont semblables.

32 Centrale

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée, on pose $\varphi(M) = AM + MA$.
Calculer la trace de φ .

33 CCINP

1. Soit f un projecteur d'un espace vectoriel de dimension finie E .
Établir une relation entre le rang et la trace de f .
2. Soit f un endomorphisme de E tel que $\operatorname{rg} f = \operatorname{tr} f = 1$. Montrer que f est un projecteur.

34 ESPCI

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit p et q deux projecteurs de E .

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer que si $p+q$ est une symétrie alors $p+q = \operatorname{Id}$.

35 *CCINP*

1. Montrer que l'ensemble V des suites complexes vérifiant $v_{n+3} = v_{n+2} + v_n$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel.
2. Montrer que $P = X^3 - X^2 - 1$ admet un unique racine réelle et deux racines complexes conjuguées.
3. Montrer que $\Phi(v) = (v_0, v_1, v_2)$ définit un isomorphisme de V dans \mathbb{C}^3 et en déduire la dimension de V .
4. Trouver les suites géométriques de V et en déduire une base de V .
5. *Ajout* : Proposer une autre méthode pour déterminer une base de V .

36 *Mines-Ponts*

Soit f et g des endomorphismes de E espace vectoriel de dimension finie.
 Montrer que $\dim(\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g)) = \text{rg}(f) - \text{rg}(g \circ f)$.

37 *Mines-Ponts*

Montrer que si F et G sont deux sous-espaces de même dimension d'un espace vectoriel de dimension finie alors ils admettent un supplémentaire commun.

38 *CCINP*

Factoriser le polynôme $P(X) = X^4 + 4$ dans $\mathbb{R}[X]$.

39 *Centrale*

1. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^3 + 1)P(X)$.
2. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X + 1)P(X)$.

40 *ENS*

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0\}$ et $F = \{A^2 + B^2; (A, B) \in \mathbb{R}[X]^2\}$.

1. Montrer que F est stable par produit.
2. Montrer que $E = F$.

41 *CCINP*

Pour $n \geq 2$, on note $\mathcal{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$. On note $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

On cherche à savoir s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left(\frac{3+4i}{5}\right)^n = 1$.

1. Montrer que $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}$ puis que $\frac{3+4i}{5} \in \mathcal{U}$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note a_k la partie réelle de $(3+4i)^k$ et b_k sa partie imaginaire.
 Exprimer a_{k+1} et b_{k+1} en fonction de a_k et b_k , puis montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, a_k et b_k sont des entiers relatifs.
3. Montrer que pour tout $k \geq 1$, le reste de la division euclidienne de a_k par 5 est 3 le reste de la division euclidienne de b_k par 5 est 4.
 Conclure.
4. Démontrer l'inégalité : $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, |e^{i\beta} - e^{i\alpha}| \leq |\beta - \alpha|$.
5. Question sur une boule ouverte non transmise par le candidat.

42 CCINP

Soit $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$ et $Q = qX^q - (X^{q-1} + X^{q-2} + \dots + 1)$.

1. Montrer que 1 est racine de Q .

On note $R = (X - 1) \times Q$. Montrer que $R = qX^{q+1} - (q + 1)X^q + 1$.

2. Soit z une racine complexe de Q .

On admet pour les questions 2) et 3) que si $|z| = 1$ alors $z = 1$.

(a) Montrer que $q|z|^q \leq \sum_{k=0}^{q-1} |z|^k$.

(b) Montrer que si $z \neq 1$ alors $|z| < 1$.

Indication : On pourra remarquer que si $|z| > 1$ alors pour tout $k \in \llbracket 0, q - 1 \rrbracket$, $|z|^k < |z|^q$.

3. Factoriser R' en produit de polynômes.

Montrer que 1 est racine double de R .

Montrer que les autres racines de R sont simples.

Conclure quant à la multiplicité des racines de Q .

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $Q(A) = 0_n$.

Montrer que A est diagonalisable.

Montrer l'existence de la limite de la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et déterminer sa nature géométrique.

5. Soit z une racine complexe de Q .

Montrer que si $|z| = 1$ alors $z = 1$.