Corrigés planches INP : première série

INP • Planche A

■ Exercice majeur

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n(x) = \frac{\alpha^n}{n!}\cos(n\,x) \text{ puis } U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

1) Donner le DSE de exp et son rayon de convergence.

Solution. Le DSE de l'exponentielle complexe a pour rayon de convergence $R = +\infty$, et

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

2) Montrer que $U(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution. Il s'agit de prouver que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant |u_n(x)| \leqslant \frac{|\alpha|^n}{n!}$$

Comme la série exponentielle $\sum_{n\geqslant 0} \frac{|\alpha|^n}{n!}$ est convergente, par théorème de comparaison, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente.

3) Montrer que U est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(sans calculer U)

Solution. On applique le théorème de dérivation terme à terme :

- Toutes les fonctions u_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (ce sont des fonctions sinusoïdales) et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n'(x) = -\frac{n\,\alpha^n}{n!}\sin(n\,x)$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ -\dfrac{\alpha^n}{(n-1)!}\sin(n\,x) & \text{si } n \geqslant 1. \end{cases}$$

- $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ d'après **Q2** ;
- Montrons que $\sum_{n\geqslant 0} u_n'$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

  Clairement, $\left\| u_0' \right\|_\infty^{\mathbb{R}} = 0$. Pour $n \geqslant 1$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|u_n'(x)\right| = \left| -\frac{\alpha^n}{(n-1)!}\sin(n\,x) \right|$$
$$\leqslant \frac{|\alpha|^n}{(n-1)!} \quad \text{indép. de } x,$$
$$\text{donc} \quad \left\| u_n' \right\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \frac{|\alpha|^n}{(n-1)!}.$$

  Comme la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{|\alpha|^n}{(n-1)!} = |\alpha| \sum_{n\geqslant 1} \frac{|\alpha|^{n-1}}{(n-1)!}$ converge, la série $\sum_{n\geqslant 0} \left\| u_n' \right\|_\infty^{\mathbb{R}}$ aussi : la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n'$ converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de dérivation terme à terme s'applique ; $U \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad U'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{(n-1)!}\sin(n\,x).$$

4) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad U(x) = \exp\big(\alpha\cos(x)\big)\cos\big(\alpha\sin(x)\big).$$

Solution. Utilisons que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \mathrm{Re}\left(\frac{\alpha^n}{n!}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\left(\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^n}{n!}\right).$$

La série exponentielle complexe $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\left(\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^n}{n!}$ est convergente, donc pour tout x réel :

$$\begin{aligned}
U(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{\left(\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^n}{n!}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^n}{n!}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\exp\left(\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)\right) \\
&= \mathrm{Re}\Big(\exp\big(\alpha\cos(x) + \mathrm{i}\,\alpha\sin(x)\big)\Big) \\
&= \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\alpha\cos(x)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\sin(x)}\right) \\
&= \mathrm{e}^{\alpha\cos(x)}\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\sin(x)}\right) \qquad \text{car } \mathrm{e}^{\alpha\cos(x)} \in \mathbb{R}, \\
&= \mathrm{e}^{\alpha\cos(x)}\cos\big(\alpha\sin(x)\big).
\end{aligned}$$

On pose : $\displaystyle V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n\cos^2(n\,x)}{n!}.$

5) Montrer que V est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer V.

Solution. Il s'agit de prouver la convergence simple de la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ où $v_n : x \mapsto \frac{\alpha^n\cos^2(n\,x)}{n!}$.

On fixe $x \in \mathbb{R}$ et on linéarise le $\cos^2$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n(x) = \frac{\alpha^n\left(\frac{\cos(2n\,x)+1}{2}\right)}{n!}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^n\cos(n(2x))}{n!} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^n}{n!}.$$

On obtient une combinaison linéaire de deux termes généraux de séries convergentes. Par linéarité de la sommation de série, $\sum_{n\geqslant 0} v_n(x)$ converge et :

$$\begin{aligned}
V(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n\cos(n(2x))}{n!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!} \\
&= \frac{1}{2}U(2x) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha\cos(2x)}\cos\big(\alpha\sin(2x)\big) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha}.
\end{aligned}$$

On pose : $\displaystyle I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\,x)\,U(x)\,\mathrm{d}x.$

6) Montrer que $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

Solution. Fixons $n \geqslant 1$ et procédons à une IPP sur le segment $[-\pi, \pi]$. Posons, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$:

$$u'(x) = \cos(n\,x), \qquad v(x) = U(x),$$
$$u(x) = \frac{1}{n}\sin(n\,x), \qquad v'(x) = U'(x).$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur le **segment** $[-\pi, \pi]$ donc l'IPP est légitime, et :

$$I_n = \left[\frac{1}{n}\sin(n\,x)\times U(x)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(n\,x)\,U'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\,x)\,U'(x)\,\mathrm{d}x.$$

La fonction U' est continue sur le segment $[-\pi,\pi]$, à valeurs réelles, donc elle y est bornée par le théorème des bornes. Par l'inégalité triangulaire pour les intégrales :

$$\begin{aligned}
|I_n| &\leqslant \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\sin(n\,x)\,U'(x)\right| \mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \left\|U'\right\|_{\infty}^{[-\pi,\pi]} \mathrm{d}x \\
&= \frac{2\pi \left\|U'\right\|_{\infty}^{[-\pi,\pi]}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Par le théorème d'encadrement, $I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

7) Calculer I_n.

Solution. Par la définition de $U(x)$:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\,x)\,U(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\,x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!}\cos(k\,x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\alpha^k}{k!}\cos(n\,x)\,\cos(k\,x)}_{v_{n,k}(x)}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Les fonctions $v_{n,k}$ sont continues sur le **segment** $[-\pi,\pi]$ et on montre sans peine que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} v_{n,k}$ converge normalement, donc uniformément sur ce segment. Cela autorise à intervertir $\sum$ et $\int$:

$$\begin{aligned}
I_n &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} v_{n,k}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\,x)\,\cos(k\,x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\big((n+k)\,x\big)+\cos\big((n-k)\,x\big)}{2}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

On montre que :

$$\forall\, p\in\mathbb{Z},\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos(p\,x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } p\neq 0 \\ 2\pi & \text{si } p=0. \end{cases}$$

Pour I_0, il ne reste que le terme pour $k=0$:

$$I_0 = \frac{\alpha^0}{0!}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+1}{2}\,\mathrm{d}x = 2\,\pi,$$

et pour chaque $n\geqslant 1$, il ne reste que le terme pour $k=n$:

$$I_n = \frac{\alpha^n}{n!}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = \pi\,\frac{\alpha^n}{n!}.$$

Conclusion : $I_n = \begin{cases} 2\,\pi & \text{si } n=0, \\ \pi\,\dfrac{\alpha^n}{n!} & \text{si } n\geqslant 1. \end{cases}$

■ Exercice mineur

Soit $z\in\mathbb{C}$ et $\quad M(z) = \begin{pmatrix} 0 & z & z \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1) Donner le polynôme caractéristique de $M(z)$.

Solution. Une fois n'est pas coutume, on développe le déterminant sans trop se poser de questions, car il n'y aura pas de factorisation intéressante.
Par exemple, par la règle de Sarrus :

$$\begin{aligned}
\chi_{M(z)} &= \begin{vmatrix} X & -z & -z \\ -1 & X & -z \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix} \\
&= +\big(X^3 - z^2 - z\big) - (z\,X + z\,X + z\,X) \\
&= X^3 - 3\,z\,X - (z^2+z).
\end{aligned}$$

Rappel. *À partir du degré 3, vous ne connaissez pas de méthode générale pour factoriser les polynômes : il faut pour y arriver avec des racines évidentes ou des identités remarquables. Ces méthodes existent pour les polynômes de degré 3 et 4 (méthode de Cardan et de Ferrari), mais vous n'êtes pas censé les connaître. À partir du degré 5, Galois a démontré qu'il était vain de chercher une méthode générale.*

2) Pour quelles valeurs de z la matrice $M(z)$ est-elle diagonalisable ?

Solution. Le polynôme caractéristique $\chi := \chi_{M(z)}$ est de toute façon scindé dans $\mathbb{C}[X]$.
Si toutes ses racines sont simples, $M(z)$ est automatiquement diagonalisable.
Cherchons les valeurs de z pour lesquelles $M(z)$ n'est pas diagonalisable, par analyse-synthèse.

- **Analyse.** Supposons $M(z)$ non diagonalisable.
  Alors χ admet une racine $\lambda\in\mathbb{C}$ d'ordre au moins 2.
  Elle vérifie $\chi(\lambda)=\chi'(\lambda)=0$.
  Grâce à la dérivée : $3\,\lambda^2 - 3\,z = 0$ donc $z=\lambda^2$.
  L'égalité $\chi(\lambda)=0$ se réécrit donc :
  $$\lambda^3 - 3\,\lambda^3 - (\lambda^4+\lambda^2) = 0 \quad\text{d'où}\quad -\lambda^4 - 2\,\lambda^3 - \lambda^2 = 0$$
  $$\text{soit}\quad -\lambda^2\,(\lambda+1)^2 = 0.$$
  Nécessairement : $\lambda=0$ ou $\lambda=-1$;
  donc : $z=0^2=0$ ou $z=(-1)^2=1$.
  Bilan : $M(z)$ est toujours diagonalisable, sauf peut-être si $z=0$ ou $z=1$.

- **Synthèse.** On étudie les deux cas restants :
  - **Si $z=0$,** alors $M(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
    Cette matrice est triangulaire, de spectre $\{0\}$; si elle était diagonalisable, elle serait nulle.
    Quand $z=0$, $M(z)$ n'est pas diagonalisable.
  - **Si $z=1$,** alors $M(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
    $M(z)$ est symétrique réelle, donc **diagonalisable** par le théorème spectral.

- **Conclusion.** $M(z)$ est diagonalisable *si et seulement si* $z\neq 0$.

INP • Planche B

■ Exercice majeur

Soit E un espace vectoriel de dimension $n\in\mathbb{N}^*$. Pour $f\in\mathscr{L}(E)$, on pose

$$f^0 = \mathrm{id}_E \quad\text{et}\quad \forall\, k\in\mathbb{N}^*,\ \ f^k = f\circ f^{k-1}.$$

On dit que $f\in\mathscr{L}(E)$ est un *endomorphisme cyclique* s'il existe $e_1\in E$ tel que

$$\big(e_1,\ f(e_1),\ \ldots,\ f^{n-1}(e_1)\big)\ \text{est une base de } E.$$

1) On suppose ici que $n=3$. On note $\mathscr{B}$ une base de E. Soit $f\in\mathscr{L}(E)$ tel que :

$$\operatorname*{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer $\operatorname*{mat}_{\mathscr{B}}(f^2)$.

Solution. $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f^2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

b. En déduire que f est cyclique.

Solution. Prenons e_3 le **troisième** vecteur de la base $\mathscr{B}$. $\mathscr{F} := \left(e_3, f(e_3), f^2(e_3)\right)$ est une base de E car elle a le bon nombre de vecteurs et :

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

f est donc cyclique.

2) Dans cette question, on considère que $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et que :

$$f: \quad P \longmapsto P(X+1) - P(X).$$

a. Soit $Q \in E$ tel que $\deg(Q) \geqslant 1$.
Montrer que : $\deg\big(f(Q)\big) = \deg(Q) - 1$.
En déduire que f n'est pas bijectif.

Solution.

- Soit $Q \in E$ tel que $d := \deg(Q) \geqslant 1$.
  Écrivons $Q = \alpha X^d + \beta X^{d-1} + R$, où $\alpha \neq 0$ et $\deg(R) < d-1$.
  Alors :
  $$\begin{aligned} f(Q) &= Q(X+1) - Q(X) \\ &= \alpha\left((X+1)^d - X^d\right) + \beta\left((X+1)^{d-1} - X^{d-1}\right) \\ &\quad + R(X+1) - R(X). \end{aligned}$$
  On développe à l'aide du binôme de Newton. Les termes de degré d disparaissent. Au degré $d-1$, on a :
  $$\alpha \,.\, d X^{d-1} + \beta\left(X^{d-1} - X^{d-1}\right) = (\alpha d) X^{d-1}.$$
  Les autres termes sont de degré $< d-1$. Comme $\alpha d \neq 0$, on a $\deg\big(f(P)\big) = d - 1 = \deg(P) - 1$.
- Soit $Q \in E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$:
  - $*$ si $\deg(Q) \geqslant 1$: $\deg\big(f(Q)\big) = \deg(Q) - 1 \leqslant n-2$;
  - $*$ si $\deg(Q) < 1$: Q est un polynôme constant donc $f(Q) = 0$ et $\deg\big(f(Q)\big) = -\infty$.

  Dans tous les cas, $\deg f(Q) \neq n-1$ donc $f(Q) \neq X^{n-1}$: le polynôme $X^{n-1} \in E$ n'a pas d'antécédent par f.
  f n'est pas surjective, donc pas bijective.

b. f est-il cyclique ?
Indication : *calculer* $\deg\left(f^j(X^{n-1})\right)$.

Solution. Remarquons que :

$$\begin{aligned} &\deg(X^{n-1}) = n-1, \\ &\deg\big(f(X^{n-1})\big) = n-2, \\ &\deg\big(f^2(X^{n-1})\big) = n-3, \\ &\quad \vdots \\ &\deg\big(f^{n-1}(X^{n-1})\big) = 0. \end{aligned}$$

$\mathscr{F} := \left(X^{n-1}, f(X^{n-1}), \ldots, f^{n-1}(X^{n-1})\right)$ est une famille de polynômes de degrés tous différents **ne contenant pas le polynôme nul :** elle est libre.
De plus, $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = n = \dim(E)$ donc c'est une base de E.
L'endomorphisme f est donc cyclique.

3) On suppose ici que $\mathrm{Ker}(f^{n-1}) \neq E$ et que $\mathrm{Ker}(f^n) = E$.

a. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$.

Solution. Comme $\mathrm{Ker}(f^{n-1}) \neq E$ et que, par définition du noyau, $\mathrm{Ker}(f^{n-1}) \subset E$, c'est que $E \not\subset \mathrm{Ker}(f^{n-1})$: il existe un élément x_0 de E qui ne se trouve pas dans $\mathrm{Ker}(f^{n-1})$, c.à.d. tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$.

b. Montrer que f est cyclique.

Solution. Prenons $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$.
Montrons que la famille

$$\mathscr{F} := \left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$$

est une base de E. Comme elle a le bon nombre de vecteurs, il suffit de prouver qu'elle est libre.
Soit $(\alpha_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \in \mathbb{K}^n$ tels que :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(x_0) = 0_E. \qquad (*)$$

Comme $\mathrm{Ker}(f^n) = E$, $f^n(x_0) = 0_E$, donc $f^j(x_0) = 0_E$ pour tout entier $j \geqslant n$.
En appliquant f^{n-1} à $(*)$, il ne reste que $\alpha_0 f^{n-1}(x_0) = 0_E$; comme $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$, on obtient $\alpha_0 = 0$.
Le premier terme de $(*)$ disparait ; en appliquant f^{n-2}, on obtient $\alpha_1 f^{n-1}(x_0) = 0_E$, d'où $\alpha_1 = 0$.
En itérant le procédé, on annule successivement tous les α_i.
La famille $\mathscr{F}$ est bien libre, ce qui achève la preuve.

4) On suppose ici f cyclique.
Montrer que ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

Solution. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. On sait que :

$$\dim\left(E_\lambda(f)\right) = n - \mathrm{rg}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E).$$

Prenons un vecteur e_1 de f tel que $\mathscr{B} := \left(f^j(e_1)\right)_{0 \leqslant j \leqslant n-1}$ soit une base de E.

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E) = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & * \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & * - \lambda \end{pmatrix}_{(n)} .$$

Le rang de cette matrice est supérieur ou égal à celui de la sous-matrice obtenue en rayant la 1re ligne et la dernière colonne, soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & & (0) \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(n-1)} .$$

Cette dernière matrice est inversible (de déterminant 1), donc de rang $n-1$.
Ainsi $\mathrm{rg}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E) \geqslant n-1$ d'où $\dim\left(E_\lambda(f)\right) \leqslant 1$.

5) On suppose ici f diagonalisable.
Montrer que f est cyclique *si et seulement si* ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

Solution. Supposons f diagonalisable.

[$\Rightarrow$] Démontré par **Q4**.

[$\Leftarrow$] Supposons les SEP de dimension 1. Comme f est diagonalisable, prenons une base de vecteurs propres $\mathscr{B} := (v_1, \ldots, v_n)$, associés aux valeurs propres $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, toutes différentes car les SEP sont de dimension 1.
Posons $e = v_1 + \cdots + v_n$. Par récurrence sur j, on prouve :

$$\forall j \in [\![0,\, n-1]\!], \quad f^j(e) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i)^j v_i.$$

La matrice de la famille $\left(e, f(e), \ldots, f^{n-1}(e)\right)$ dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice de Vandermonde $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
Comme les λ_i sont tous différents, cette matrice est de déterminant non nul, ce qui prouve que la famille est une base de E.
Ainsi, f est cyclique.

■ Exercice mineur

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout x réel, on pose :

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right).$$

1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
Sa somme est notée f.

Solution. **Fixons $x \in \mathbb{R}$ et prouvons la convergence de la série numérique $\sum_{n \geqslant 1} f_n(x)$.**

Puisque $\arctan(t) \underset{t \to 0}{\sim} t$ et que $\dfrac{x}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$:

$$f_n(x) \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{n} \times \frac{x}{\sqrt{n}} = \frac{x}{n^{3/2}}.$$

La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{x}{n^{3/2}}$ est à termes positifs et elle est convergente (mult. de série de Riemann d'expo. $\alpha = 3/2 > 1$) ; il en est de même pour $\sum_{n \geqslant 1} f_n(x)$.

2) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution. On applique le théorème de continuité de la somme :

* Toutes les f_n sont continues sur $\mathbb{R}$.
* Prouvons que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur tout segment $[-a,a]$.

  L'imparité de la fonction f_n montre que
  $$\|f_n\|_\infty^{[-a,a]} = \|f_n\|_\infty^{[0,a]}.$$
  De plus, sur $[0,a]$, f_n croit de $f_n(0)=0$ à $f_n(a)\geqslant 0$.
  Par conséquent :
  $$\|f_n\|_\infty^{[-a,a]} = f_n(a) = \frac{1}{n}\arctan\left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{a}{n^{3/2}}.$$
  Ceci montre que la série $\sum_{n\geqslant 1}\|f_n\|_\infty^{[-a,a]}$ converge, comme pour la convergence simple.

Le théorème s'applique : la somme f de $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ est donc continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque. *Il n'y a pas de convergence normale sur* $\mathbb{R}$ *car* $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = \pi/(2n)$.

INP • Planche C

■ Exercice majeur

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$,

$$C = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha+\beta=\gamma$, $\beta\neq 0$, $\gamma\neq 0$, $\beta\neq -\gamma$.

1) Montrer que A est diagonalisable.

Solution. On remarque que $\mathrm{rg}(A)=1$ car $C_2=-2C_1$, $C_3=-C_1$ et $C_1\neq 0_{3,1}$.
Donc $0\in\mathrm{Sp}(A)$ d'où $\mathrm{m}_0(A)\geqslant \dim(E_0(A)) = 3-\mathrm{rg}(A)=2$.
Le polynôme caractéristique s'écrit donc $\chi_A = X^2(X-\lambda)$: il est scindé. La somme des valeurs propres vaut donc la trace : $0+0+\lambda=\mathrm{tr}(A)=2$.
Ainsi $\chi_A = X^2(X-2)$. De plus : $\dim(E_0(A))=2=\mathrm{m}_0(A)$, et $\dim(E_2(A))=1=\mathrm{m}_2(A)$ (valeur propre simple).

Conclusion : la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

2) a. Déterminer χ_C en fonction de χ_A, et en déduire le spectre de C.

Solution. On calcule le polynôme caractéristique de C en calculant par blocs :

$$\begin{aligned}\chi_C = \det(X\,\mathrm{I}_6 - C) &= \det\begin{bmatrix} X\,\mathrm{I}_3 - A & -A \\ 0_3 & X\,\mathrm{I}_3 - A\end{bmatrix} \\ &= \det(X\,\mathrm{I}_3 - A)^2 \quad \text{(dét. triang. par blocs)} \\ &= \big(\chi_A(X)\big)^2.\end{aligned}$$

Puisque pour pour $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\lambda\in\mathrm{Sp}(C) &\iff \chi_C(\lambda)=0 \iff \big(\chi_A(\lambda)\big)^2=0 \\ &\iff \chi_A(\lambda)=0 \iff \lambda\in\mathrm{Sp}(A),\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{Sp}(C)=\mathrm{Sp}(A)=\{0,\ 2\}$

b. Mêmes questions pour B.

Solution. On procède de même pour χ_B :

$$\chi_B = \det(X\,\mathrm{I}_6 - B) = \det\begin{bmatrix} X\,\mathrm{I}_3 - \alpha A & -\beta A \\ -\gamma A & X\,\mathrm{I}_3\end{bmatrix}.$$

On ajoute C_4 à C_1, C_5 à C_2 et C_6 à C_3 :

$$\begin{aligned}\chi_B &= \det\begin{bmatrix} X\,\mathrm{I}_3 - (\alpha+\beta)A & -\beta A \\ X\,\mathrm{I}_3 - \gamma A & X\,\mathrm{I}_3\end{bmatrix} \\ &= \det\begin{bmatrix} X\,\mathrm{I}_3 - \gamma A & -\beta A \\ X\,\mathrm{I}_3 - \gamma A & X\,\mathrm{I}_3\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

On ajoute $-L_1$ à L_4, $-L_2$ à L_5 et $-L_3$ à L_6 :

$$\begin{aligned}\chi_B &= \det\begin{bmatrix} X\,\mathrm{I}_3 - \gamma A & -\beta A \\ 0_3 & X\,\mathrm{I}_3 + \beta A\end{bmatrix} \\ &= \det(X\,\mathrm{I}_3 - \gamma A)\times\det(X\,\mathrm{I}_3+\beta A).\end{aligned}$$

On peut factoriser par $\gamma\neq 0$ et $-\beta\neq 0$:

$$\begin{aligned}\chi_B &= \det\Big(\gamma\cdot(\tfrac{X}{\gamma}\,\mathrm{I}_3 - A)\Big)\times\det\Big((-\beta)\cdot(\tfrac{X}{-\beta}\,\mathrm{I}_3 - A)\Big) \\ &= \gamma^3(-\beta)^3\,\chi_A(X/\gamma)\,\chi_A(-X/\beta).\end{aligned}$$

Le polynôme χ_B s'annule en x si et seulement si x/γ ou $-x/\beta$ est une racine de χ_A, c.à.d. 0 ou 2.
Les valeurs propres de B sont donc 0, 2γ et -2β.

Conclusion : $\mathrm{Sp}(B)=\{0,\ 2\beta,\ -2\gamma\}$.

3) Montrer que si $X\in\mathrm{Ker}(A)$, alors $\begin{pmatrix} X \\ 0\end{pmatrix}\in\mathrm{Ker}(B)$.

Solution. (On note 0 pour $0_{3,1}$)
Supposons que $X\in\mathrm{Ker}(A)$: alors $AX=0$. Mais alors :

$$B = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & 0_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha AX \\ \gamma AX\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix} = 0_{6,1}.$$

On a bien $\begin{pmatrix} X \\ 0\end{pmatrix}\in\mathrm{Ker}(B)$.

4) Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}\,B)\geqslant 2\dim(\mathrm{Ker}\,A)$.

Solution. Par le même calcul, on constate que tous les vecteurs $\begin{pmatrix} X \\ Y\end{pmatrix}$, pour X et Y dans $\mathrm{Ker}(A)$, se trouvent dans $\mathrm{Ker}(B)$.
Ces vecteurs forment l'espace $\mathrm{Ker}(A)\times\mathrm{Ker}(A)$: on a donc $\mathrm{Ker}(A)\times\mathrm{Ker}(A)\subset\mathrm{Ker}(B)$.
Or $\dim(\mathrm{Ker}(A)\times\mathrm{Ker}(A)) = 2\dim(\mathrm{Ker}\,A)$;
l'inclusion donne $2\dim(\mathrm{Ker}\,A)\leqslant\dim(\mathrm{Ker}\,B)$.

Remarque. *On peut aussi expliciter la matrice B est constater que son rang vaut 2, donc* $\dim(\mathrm{Ker}\,B)=6-2=4=2\dim(\mathrm{Ker}\,A)$.

5) Diagonaliser B dans le cas où $\alpha=-1$, $\beta=3$, $\gamma=2$.

Solution.

* D'après **Q2b** : $\mathrm{Sp}(B)=\{0,4,-6\}$; 0 est valeur propre d'ordre 4 et les deux autres sont simples.
  $E_4(B)$ et $E_{-6}(B)$ sont de dimension 1 et d'après **Q4**, la dimension de $E_0(B)$ vaut au moins 4 : c'est en fait une égalité. **Cela prouve que B est diagonalisable.**
* **Base de $E_0(B)$:** on cherche 4 vecteurs de $E_0(B)$ linéairement indépendants.
  D'après **Q1**, $U := (2,1,0)$ et $V := (1,0,1)$ sont vecteurs propres de A pour la valeur propre 0. D'après **Q4**, les vecteurs $\binom{U}{0},\binom{V}{0},\binom{0}{U},\binom{0}{V}$ sont dans $E_0(B)$.
  On vérifie que ces vecteurs forment une famille libre (par la définition) ; comme il y en a 4, ils forment une base de $E_0(B)$.
* **Base de $E_4(B)$ et $E_{-6}(B)$:** il suffit de trouver un $\overrightarrow{\text{vp}}$ pour chaque valeur propre. Prenons W un $\overrightarrow{\text{vp}}$ de A pour la vp 2, et regardons $\binom{W}{xW}$ pour $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}B\begin{pmatrix} W \\ xW\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -A & 3A \\ 2A & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} W \\ xW\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1+3x)AW \\ 2AW\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(3x-1)W \\ 4W\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ce vecteur sera vecteur propre de B pour la vp λ quand :

$$\begin{aligned}B\begin{pmatrix} W \\ xW\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} W \\ xW\end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} 2(3x-1)W \\ 4W\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda W \\ \lambda x W\end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 2(3x-1)=\lambda \\ 4=\lambda x.\end{cases}\end{aligned}$$

(rappelons que W n'est pas nul car c'est un vecteur propre).
Pour $\lambda=4$, $x=1$ convient : $\binom{W}{W}\in E_4(B)$; pour $\lambda=-6$, $x=-2/3$ convient : $\binom{W}{-2/3\,W}\in E_{-6}(B)$, de même que $\binom{3W}{-2W}$.
Une étude de la matrice $A-2\,\mathrm{I}_3$ permet de trouver que $W:=(1,-2,3)\in E_2(A)$.

Conclusion : $B = P\,\mathrm{diag}(0,\,0,\,0,\,0,\,4,\,-6)\,P^{-1}$ si l'on pose

$$P = \begin{bmatrix} U & V & 0 & 0 & W & 3W \\ \\ 0 & 0 & U & V & W & -2W \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

■ Exercice mineur

Soit $f_n : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sin(n\,x)\,\mathrm{e}^{-n^2x^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Convergence simple de $(f_n)_{n\geqslant 1}$?

Solution. **Fixons $x \in \mathbb{R}$.**

↪ **1^er^ cas : si $x \neq 0$.**
Pour tout $n \geqslant 1$, $|f_n(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-n^2x^2}$, et comme $-n^2x^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$, son exponentielle tend vers 0. Par le théorème d'encadrement, $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

↪ **2^e^ cas : si $x = 0$.**
$\sin(n\,x) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$ donc $f_n(x) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Conclusion : La suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f : x \mapsto 0$.

2) Convergence uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ sur $[\alpha, 1]$, où $0 < \alpha < 1$?

Solution. Fixons $n \geqslant 1$ et majorons $\|f_n\|_\infty^{[\alpha,1]}$:

$$\forall x \in [\alpha, 1], \quad |f_n(x) - f(x)| = |\sin(n\,x)|\,\mathrm{e}^{-n^2x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-n^2x^2}.$$

Comme $x \geqslant \alpha \geqslant 0$, $x^2 \geqslant \alpha^2$, puis $-n^2x^2 \leqslant -n^2\alpha^2$ et en prenant l'exponentielle (croissante sur $\mathbb{R}$) :

$$\forall x \in [\alpha, 1], \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-n^2\alpha^2} \quad \text{indép. de } x.$$

Ainsi $\|f_n - f\|_\infty^{[\alpha,1]} \leqslant \mathrm{e}^{-n^2\alpha^2}$, expression qui tend vers 0 quand $n \to \infty$ **puisque $\alpha^2 > 0$.** Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\|f_n - f\|_\infty^{[\alpha,1]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Conclusion : Pour tout $\alpha \in]0,1[$, la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[\alpha, 1]$ vers la fonction nulle.

3) Même question sur $[0,1]$.

Solution. **La convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.** Prenons $x_n := \pi/(2n)$ pour tout $n \geqslant 1$. Alors :

$$f_n(x_n) = \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{e}^{-\pi^2} = \mathrm{e}^{-\pi^2}$$
$$\text{d'où} \quad \left|f_n(x_n) - f(x_n)\right| = \mathrm{e}^{-\pi^2}.$$

On en déduit que $\|f_n - f\|_\infty^{[0,1]} \geqslant \mathrm{e}^{-\pi^2}$, quantité constante strictement positive ; cela empêche le membre de tendre vers 0 quand $n \to \infty$.

INP • Planche D

■ Exercice majeur

Soit $\varphi_U : \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{C}[X]$, $P \longmapsto P + P(a)\,U$,

où $a \in \mathbb{C}$ et U est un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$.

1) Montrer que φ_U est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.

Solution.

∗ $\mathbb{C}[X]$ est un espace vectoriel et pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P + P(a)\,U \in \mathbb{C}[X]$.

∗ Montrons que φ_U est linéaire : pour tous $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \varphi_U(\alpha\,P + \beta\,Q) &= (\alpha\,P + \beta\,Q) + (\alpha\,P + \beta\,Q)(a)\,U \\ &= \alpha\,P + \beta\,Q + \big(\alpha\,P(a) + \beta\,Q(a)\big)\,U \\ &= \alpha\,(P + P(a)\,U) + \beta\,(Q + Q(a)\,U) \\ &= \alpha\,\varphi_U(P) + \beta\,\varphi_U(Q). \end{aligned}$$

Conclusion : $\varphi_U \in \mathscr{L}\big(\mathbb{C}[X]\big)$.

2) a. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi_U) \subset \mathrm{Vect}(U)$.

Solution. Soit $P \in \mathrm{Ker}(\varphi_U)$.
Montrons que $P \in \mathrm{Vect}(U)$, c.à.d. que P est un multiple du vecteur U.
On a $\varphi_U(P) = 0$ donc $P + P(a)\,U = 0$ donc $P = -P(a)\,U$: c'est bien le cas.
Conclusion : $\mathrm{Ker}(\varphi_U) \subset \mathrm{Vect}(U)$.

b. Montrer que :

$$U(a) = -1 \implies \mathrm{Ker}(\varphi_U) = \mathrm{Vect}(U)$$

et que :

$$U(a) \neq -1 \implies \mathrm{Ker}(\varphi_U) = \{0\}.$$

Solution.

- **Supposons que $U(a) = -1$.**
On sait que $\mathrm{Ker}(\varphi_U) \subset \mathrm{Vect}(U)$. Pour montrer l'inclusion réciproque, il suffit de prouver que $U \in \mathrm{Ker}(\varphi_U)$ puisque $\mathrm{Ker}(\varphi_U)$ est stable par combinaison linéaire. Or :
$$\varphi_U(U) = U + U(a)\,U = U - U = 0 : \text{c'est bien le cas.}$$
Conclusion : $U(a) = -1 \implies \mathrm{Ker}(\varphi_U) = \mathrm{Vect}(U)$.
- **Supposons que $U(a) \neq -1$.**
Montrons que $\mathrm{Ker}(\varphi_U) = \{0\}$.
Cherchons les $P \in \mathrm{Ker}(\varphi_U)$ par **analyse-synthèse.**
  - ∗ Si $P \in \mathrm{Ker}(\varphi_U)$, nécessairement $P \in \mathrm{Vect}(U)$ d'après **Q2a**. Il s'écrit $P = \lambda\,U$ pour un $\lambda \in \mathbb{C}$.
  - ∗ Réciproquement, soit $P = \lambda\,U$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors :
$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(\varphi_U) &\iff \varphi_U(\lambda\,U) = 0 \\ &\iff \lambda\,U + \lambda\,U(a)\,U = 0 \\ &\iff \lambda\,\underbrace{\big(1 + U(a)\big)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{U}_{\neq 0} = 0 \\ &\iff \lambda = 0 \iff P = 0. \end{aligned}$$

Conclusion : $U(a) \neq -1 \implies \mathrm{Ker}(\varphi_U) = \{0\}$.

3) a. Montrer que :

$$\varphi_U^2 - \big(2 + U(a)\big)\,\varphi_U + \big(1 + U(a)\big)\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}[X]} = \mathbf{0}.$$

Solution. Prenons $P \in \mathbb{C}[X]$ quelconque :

$$\begin{aligned} \varphi_U^2(P) &= \varphi_U\big(\varphi_U(P)\big) = \varphi_U(P) + \big[\varphi_U(P)\big](a)\,U \\ &= P(X) + P(a)\,U(X) + \big(P(a) + P(a)\,U(a)\big)\,U(X) \\ &= P(X) + \big(2 + U(a)\big)\,P(a)\,U(X) \\ &= \big(2 + U(a)\big) \cdot \big(P(X) + P(a)\,U(X)\big) \\ &\quad - \big(1 + U(a)\big) \cdot P(X) \\ &= \big(2 + U(a)\big)\,\varphi_U(P) - (1 + U(a))\,\mathrm{id}(P). \end{aligned}$$

Conclusion : $\varphi_U^2 = \big(2 + U(a)\big)\,\varphi_U - \big(1 + U(a)\big)\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}[X]}$.

b. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que φ_U soit un automorphisme.
Préciser φ_U^{-1}.

Solution. Cherchons les polynôme P tels que φ_U est un automorphisme, c.à.d. tels que φ_U soit bijectif. Par **analyse-synthèse :**

∗ **Supposons que P convienne.** Nécessairement, $\mathrm{Ker}(\varphi_U) = \{0\}$. D'après **Q2b**, $U(a) \neq -1$.

∗ **Réciproquement, supposons que $U(a) \neq -1$.**
D'après **Q3a**, $Q := X^2 - \big(2+U(a)\big)X + \big(1+U(a)\big)$ est un polynôme annulateur de φ_U.
Son coefficient constant $1+U(a)$ est non nul, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\mathrm{id}_{\mathbb{C}[X]} &= \frac{1}{1+U(a)}\left(-\varphi_U^2 + \big(2+U(a)\big)\varphi_u\right)\\ &= \varphi_U \circ \left(-\frac{1}{1+U(a)}\varphi_U + \frac{2+U(a)}{1+U(a)}\mathrm{id}\right)\\ &= \left(-\frac{1}{1+U(a)}\varphi_U + \frac{2+U(a)}{1+U(a)}\mathrm{id}\right)\circ\varphi_U.\end{aligned}$$

Remarque. *Ne pas oublier de factoriser des 2 côtés car $\mathbb{C}[X]$ est de dimension infinie. En dimension finie, un seul côté suffit (c'est toujours le cas pour les matrices).*
Cela prouve que φ_U est bijectif et que :

$$\varphi_U^{-1} = -\frac{1}{1+U(a)}\varphi_U + \frac{2+U(a)}{1+U(a)}\mathrm{id},$$

donc pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$:

$$\begin{aligned}\varphi_U^{-1}(P) &= \frac{1}{1+U(a)}\Big[-\big(P+P(a)U\big) + \big(2+U(a)\big)P\Big]\\ &= \frac{1}{1+U(a)}\Big[\big(1+U(a)\big)P + P(a)U\Big]\\ &= P - \frac{P(a)}{1+U(a)}U.\end{aligned}$$

Conclusion : $\varphi_U \in \mathrm{GL}\big(\mathbb{C}[X]\big) \iff a \neq -1$,
et quand c'est le cas, $\varphi_U^{-1} : P \mapsto P - \dfrac{P(a)}{1+U(a)}U$.

4) On suppose $U(a) = -1$. Quelle est la nature de φ_U ? En déduire $\mathrm{Im}(\varphi_U)$.

Solution. Quand $U(a) = -1$, **Q3a** donne $\varphi_U^2 = \varphi_U$: l'application φ_U est donc un projecteur.
Son image est l'ensemble des vecteurs invariants, autrement dit $E_1(\varphi_U)$; cherchons ces vecteurs. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$ quelconque :

$$\begin{aligned}P \in E_1(\varphi_U) &\iff \varphi_U(P) = P \iff P + P(a)U = P\\ &\iff P(a)U = 0 \iff P(a) = 0\end{aligned}$$

car U n'est pas le polynôme nul.
Conclusion : $\mathrm{Im}(\varphi_U)$ est l'ensemble des polynômes qui s'annulent en a : ils s'écrivent $(X-a)Q(X)$ pour $Q \in \mathbb{C}[X]$ quelconque.

5) Résoudre dans $\mathbb{C}[X]$ l'équation $V = P + P(a)U$, d'inconnue P.

Solution. Fixons $V \in \mathbb{C}[X]$. On cherche à résoudre l'équation $\varphi_U(P) = V$, d'inconnue V.

- **1er cas : si $U(a) \neq -1$.**
L'endomorphisme φ_U est bijectif, donc l'équation admet pour unique solution :

$$P_0 := \varphi_U^{-1}(V) = V(X) - \frac{V(a)}{1+U(a)}U(X).$$

- **2e cas : si $U(a) = -1$.**
Remarquons tout d'abord que si l'équation admet une solution P_0, alors $\varphi_U(P_0) = V$: $V \in \mathrm{Im}(\varphi_U)$ donc V s'annule en a.
Par contraposition : si $V(a) \neq 0$, alors l'équation n'a pas de solution.
Supposons désormais que $V(a) = 0$.
Par analyse-synthèse :
  ∗ Si P est une solution, comme $P = -P(a)U + V$, P est de la forme $\alpha U + V$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$.
  ∗ Réciproquement, prenons $P = \alpha U + V$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque. Alors :

$$\begin{aligned}\varphi_U(P) &= (\alpha U(X) + V(X)) + (\alpha U(a) + V(a))\,U(X)\\ &= \alpha U(X) + V(X) + (-\alpha + 0)U(X)\\ &= V(X) :\end{aligned}$$

  le polynôme P est solution de l'équation.
Les solutions de l'équation sont donc les polynômes $\alpha U + V$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Conclusion : L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'équation $\varphi_U(P) = V$ est :

$$\mathscr{S} = \begin{cases}\left\{V - \dfrac{V(a)}{1+U(a)}U\right\} & \text{si } a \neq -1\,;\\ \varnothing & \text{si } a = 1 \text{ et } V(a) \neq 0\,;\\ \big\{\alpha U + V\,;\, \alpha \in \mathbb{C}\big\} & \text{si } a = 1 \text{ et } V(a) = 0.\end{cases}$$

■ Exercice mineur

1) Pour tout $x \in \,]-1,1[$, montrer que :

$$\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}.$$

Solution. Fixons $x \in \,]-1,1[$. La fonction $t \mapsto \frac{\arctan(t)}{t}$ est c.p.m. sur $]\,0,x\,]/[x,0\,[$. Grâce au développement en série entière d'arctan, valable sur $]-1,1[$:

$$\begin{aligned}\forall\, t \in \,]-1,1[\,\setminus\{0\} : \quad \frac{\arctan(t)}{t} &= \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{2n+1} = S(t).\end{aligned}$$

La fonction S, somme d'une série entière de rayon de convergence 1, est en fait définie sur la totalité de $]-1,1[$ (y compris en 0). Comme le segment d'extrémités 0 et x est inclus dans l'ouvert de convergence $]-1,1[$, on peut intégrer terme à terme :

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{2n+1}\,\mathrm{d}t\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}x^{2n+1}.\end{aligned}$$

2) Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Solution. On fait tendre x vers 1^- dans le résultat précédent :

∗ La fonction $f : t \mapsto \frac{\arctan(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, et prolongeable par continuité en 0.
Par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $\Phi : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$; elle dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue en 1, d'où :

$$\begin{aligned}&\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(x)\\ &\xrightarrow[x\to1^-]{} \Phi(1) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

∗ Notons S la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant0}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$
et posons $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Sur le segment $[0,1]$, on montre sans difficulté que :

$$\|f_n\|_\infty^{[0,1]} = \frac{1}{(2n+1)^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2},$$

ce qui prouve la convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant0} f_n$ sur $[0,1]$.
On en déduit que S est définie et continue sur $[0,1]$. Ainsi :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^2} \xrightarrow[x\to1^-]{} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

Par unicité de la limite, on en déduit que :

$$\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$