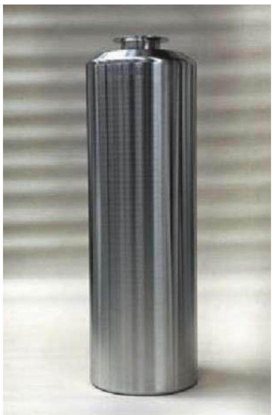
3.3 Diffusion thermique-Exercice 29

On considère un fut de matière radioactive dégageant uniformément dans son volume une puissance de 2 kW. Sa température intérieure ne doit pas dépasser 510°C. Il est envisagé de le stocker profondément sous terre, sans ventilation, à condition que la température ambiante soit inférieure à 90°C.



Données :
- Hauteur $H = 1{,}338$ m
- Diamètre $2a = 43$ cm
- Conductivité thermique $\lambda = 1$ W.m^{-1}.K^{-1}
- Loi de Newton : en un point M de l'interface entre un solide et un fluide et en Notant T_s la température du solide à sa surface en M et T_f celle du fluide, on observe un transfert thermique dont le vecteur densité de flux thermique s'exprime par $\vec{j}(M) = h(T_s - T_f)\vec{n}$, où h est le coefficient de transfert thermique (coefficient conducto-convectif) et $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à la surface en M, dirigé du solide vers le fluide.
- Coefficient conducto-convectif air/solide (convection naturelle) $h = 9$ W·K^{-1}.m^{-2}
- Laplacien en coordonnées cylindriques : $\Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial U}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$

Le stockage est-il possible ?

- Les réactions nucléaires constituent une source interne de puissance volumique : $p_v = \frac{P}{\pi a^2 h} = 10300$ W.m^{-3}
- Equation de la diffusion thermique en régime stationnaire, avec terme de source interne : $\Delta T + \frac{p_v}{\lambda} = 0$

  Donc : $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = -\frac{p_v}{\lambda}$ => $\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = -\frac{rp_v}{\lambda}$ => $r\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{r^2 p_v}{2\lambda} + A$ => $\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{rp_v}{2\lambda} + \frac{A}{r}$

  Soit : $T = -\frac{r^2 p_v}{4\lambda} + ALnr + B$
- Conditions aux limites : T finie en $r = 0$ => $A = 0$ et $T_s = -\frac{a^2 p_v}{4\lambda} + B$

  Donc : $T = \frac{p_v}{4\lambda}(a^2 - r^2) + T_s$

  Loi de Newton : $-\lambda\frac{dT}{dr}(a) = h(T_s - T_f)$ => $\frac{ap_v}{2} = h(T_s - T_f)$ => $T_s = T_f + \frac{ap_v}{2h}$
- Finalement : $\boxed{T = \frac{p_v}{4\lambda}(a^2 - r^2) + T_f + \frac{ap_v}{2h}}$
- La température maximale est atteinte en $r = 0$ et vaut : $T_{max} = \frac{p_v}{4\lambda}a^2 + T_f + \frac{ap_v}{2h}$

  En prenant $T_f = 90°$, on trouve : $T_{max} = 270$ °C

  C'est inférieur à 510°C, donc <u>le stockage est possible</u>.
