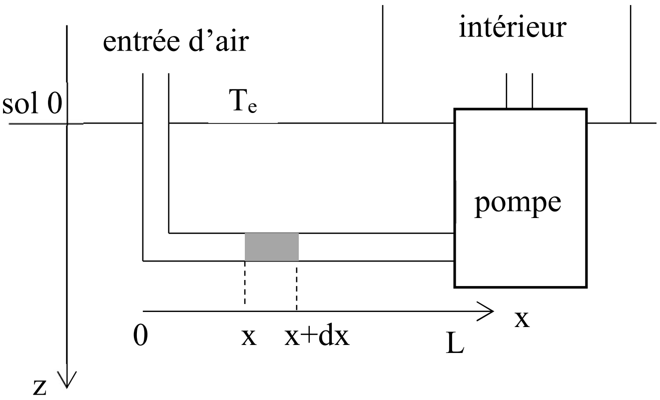
3.3 Diffusion thermique-Exercice 12

---

a-Donner la loi de Fourier avec l'unité de chaque terme. Redémontrer l'équation de la chaleur dans le cas d'un problème unidimensionnel $T(z,t)$.

On étudie le système ci-contre.
Le sol a une conductivité thermique λ, une masse volumique μ et une capacité thermique massique c.
La température au niveau du sol varie suivant la saison selon la loi : $T_e = T_s + \Delta T \sin\omega t$
On cherche la température dans le sol à la profondeur z sous la forme :
$T(z,t) = T_s + A.\exp(-z/\delta).\sin(\omega t - kz)$



b-Déterminer A, δ et k en fonction de ω, ΔT, λ, c et μ.

On s'intéresse maintenant à l'air dans la canalisation, assimilé à un gaz parfait de température $T(x)$ et de capacité thermique à pression constante c_p.
La canalisation de longueur L est enterrée à une profondeur où la température du sol vaut T_s.
L'air s'écoule lentement, en régime permanent, avec un débit massique D_m.
L'air entre x et x+dx reçoit du sol une puissance thermique $\delta P_{th} = \alpha dx(T_s - T(x))$ où α est une constante.

c-Appliquer le premier principe de la thermodynamique au système ouvert constitué par la tranche d'air entre x et x + dx et en déduire une équation différentielle d'ordre 1 en $T(x)$.

d-Résoudre et exprimer $T(x)$ en fonction de T_s, T_e et $\ell_0 = D_m c_p/\alpha$.

3.3 Diffusion thermique-Exercice 12

---

a-<u>Loi de Fourier</u> : $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}T$

$\vec{j}_Q$ en $W.m^{-2}$; $\overrightarrow{\text{grad}}T$ en $K.m^{-1}$; λ en $W.m^{-1}.K^{-1}$

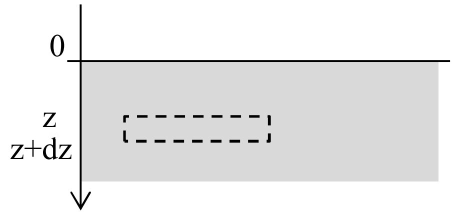
<u>Premier principe</u> pour la tranche de solide de section S et épaisseur dz entre t et t + dt :

$dU = \delta Q_{\text{»entrant en z »}} + \delta Q_{\text{»entrant en z+dz»}}$

$\mu S dz c dT = j_Q(z,t)Sdt - j_Q(z+dz,t)Sdt$

$\mu c \dfrac{\partial T}{\partial t}(z,t) = -\dfrac{\partial j_Q}{\partial x}(z,t)$ avec $j_Q = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial z}(z,t)$

donc : $\boxed{\dfrac{\partial T}{\partial t}(z,t) = \dfrac{\lambda}{\mu c}\dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z,t)}$



b-On injecte $T(z,t) = T_s + A.\exp(-z/\delta).\sin(\omega t - kz)$ dans $\dfrac{\partial T}{\partial t}(z,t) = \dfrac{\lambda}{\mu c}\dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z,t)$

Cela donne : $\omega\cos(\omega t - kz) = \dfrac{\lambda}{\mu c}[\dfrac{1}{\delta^2}\sin(\omega t - kz) + 2\dfrac{k}{\delta}\cos(\omega t - kz) - k^2\sin(\omega t - kz)]$

En identifiant : $\omega = 2\dfrac{\lambda}{\mu c}\dfrac{k}{\delta}$ et $\dfrac{1}{\delta^2} = k^2$ D'où : $\boxed{k = \dfrac{1}{\delta}}$ et $\boxed{\delta = \sqrt{\dfrac{2\lambda}{\mu c \omega}}}$

Condition aux limites en z = 0 : $T_s + \Delta T \sin\omega t = T_s + A\sin\omega t$ D'où : $\boxed{A = \Delta T}$

c-Système ouvert (S) : l'air entre x et x+dx

Système fermé $(S)^* = (S)_t + dm_e = (S)_{t+dt} + dm_s$

<u>Premier principe</u> entre t et t + dt à $(S)^*$:

$dU_{(s)^*} = \delta Q + \delta W_{pression}$

$dU_{(s)^*} = dm_s u(x+dx) - dm_e u(x) = D_m dt[u(x+dx) - u(x)]$

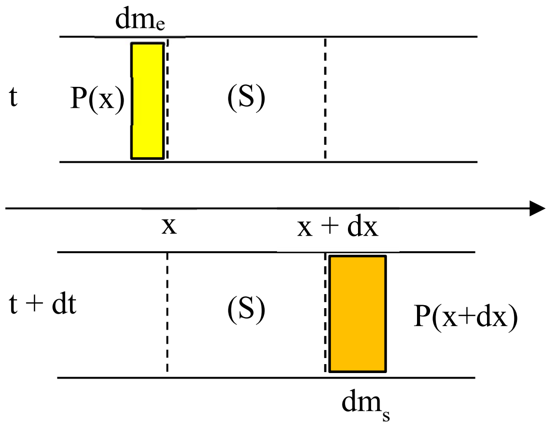
car l'écoulement est stationnaire

$\delta Q = \delta P_{th}.dt$

$\delta W_{pression} = P(x)dm_e v(x) - P(x+dx)dm_s v(x+dx)$

$= [P(x)v(x) - P(x+dx)v(x+dx)]D_m dt$

où v est le volume massique



$D_m[u(x+dx)+P(x+dx)v(x+dx) - u(x)-P(x)v(x)] = \delta P_{th}.$

$D_m[h(x+dx) - h(x)] = \delta P_{th}$ en faisant apparaître l'enthalpie massique h = u + Pv

$D_m \dfrac{dh}{dx}(x)dx = \alpha dx(T_s - T(x))$

Or $\dfrac{dh}{dx}(x) = c_P \dfrac{dT}{dx}(x)$ d'où : $\boxed{\dfrac{dT}{dx}(x) + \dfrac{\alpha}{D_m c_P}T(x) = \dfrac{\alpha}{D_m c_P}T_s}$ On pose : $\ell_0 = \dfrac{D_m c_P}{\alpha}$

d-Solution : $T(x) = Ae^{-\frac{x}{\ell_0}} + T_s$

Condition aux limites : $T(x=0) = T_e = A + T_s$

Finalement : $\boxed{T(x) = (T_e - T_s)e^{-\frac{x}{\ell_0}} + T_s}$
