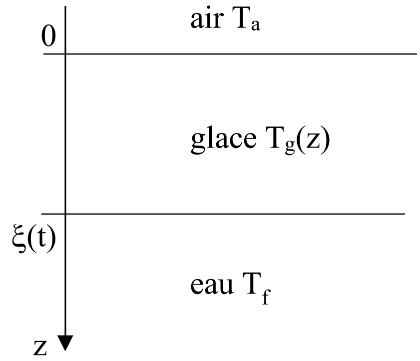
3.3 Diffusion thermique-Exercice 2

Un lac se couvre progressivement de glace en contact avec l'air ambiant à la température $T_a = 263$ K. La température $T_f = 273$ K de l'eau du lac est uniforme égale à la température de fusion de l'eau.



On note :

- c_g : capacité thermique massique de la glace
- λ_g : conductivité thermique dela glace
- ρ_g : masse volumique de la glace
- L_f : enthalpie massique de fusion de l'eau
- $\xi(t)$: épaisseur de la couche de glace à l'instant t

On donne :$\lambda_g = 2{,}1\ \mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$; $\rho_g = 900\ \mathrm{kg.m^{-3}}$; $L_f = 334\ \mathrm{kJ.kg^{-1}}$

a-Par un bilan énergétique sur une portion de glace comprise entre z et z + dz, établir l'équation de la diffusion thermique.

b-En supposant le régime quasi-stationnaire, déterminer $T_g(z)$.

c-Exprimer la masse dm de la couche de glace formée sur une surface S entre t et t + dt.

d-Montrer que : $\lambda_g \left(\dfrac{\partial T_g}{\partial z}\right)_{\xi(t)} = \rho_g L_f \dfrac{d\xi}{dt}$

e-En déduire une équation différentielle pour $\xi(t)$. Montrer que $\xi(t) = \sqrt{2Dt}$ et exprimer D.

f-Calculer l'épaisseur de glace formée au bout de 24h.

---

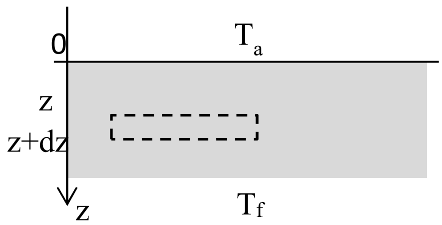
a-Premier principe pour la tranche de glace de section S et épaisseur dz entre t et t + dt :

$dU = \delta Q_{\text{»entrant en z »}} + \delta Q_{\text{»entrant en z +dz»}}$

$\rho_g S dz c_g dT_g = j_Q(z,t)Sdt - j_Q(z+dz,t)Sdt$

$\rho_g c_g \dfrac{\partial T_g}{\partial t}(z,t) = -\dfrac{\partial j_Q}{\partial z}(z,t)$ avec $j_Q = -\lambda_g \dfrac{\partial T_g}{\partial z}$

donc : $\boxed{\dfrac{\partial T_g}{\partial t}(z,t) = \dfrac{\lambda_g}{\rho_g c_g}\dfrac{\partial^2 T_g}{\partial z^2}(z,t)}$



b-En régime stationnaire : $\dfrac{d^2 T_g}{dz^2}(z) = 0$ d'où : $T_g(z) = Az + B$

Conditions aux limites : $T_g(0) = T_a$ et $T_g(\xi) = T_f$ d'où : $\boxed{T_g(z) = \dfrac{T_f - T_a}{\xi} z + T_a}$

c-L'épaisseur de glace varie de $d\xi$, donc : $dm = \rho_g S d\xi$

d-La solidification de la masse dm libère la chaleur $-dmL_f$

Cette chaleur est évacuée vers l'air par conduction thermique à travers l'interface eau-glace : $j_Q(\xi)Sdt$

Donc : $-\rho_g S d\xi L_f = -\lambda_g \left(\dfrac{\partial T_g}{\partial z}\right)_{\xi(t)} Sdt$ d'où : $\lambda_g \left(\dfrac{\partial T_g}{\partial z}\right)_{\xi(t)} = \rho_g L_f \dfrac{d\xi}{dt}$

e- $\left(\dfrac{\partial T_g}{\partial z}\right)_{\xi(t)} = \dfrac{T_f - T_a}{\xi}$ d'où : $\boxed{\xi \dfrac{d\xi}{dt} = \lambda_g \dfrac{T_f - T_a}{\rho_g L_f}}$

On intègre entre t = 0 et t : $\dfrac{\xi^2}{2} = \lambda_g \dfrac{T_f - T_a}{\rho_g L_f} t$ donc : $\xi(t) = \sqrt{2Dt}$ avec $\boxed{D = \lambda_g \dfrac{T_f - T_a}{\rho_g L_f}}$

f-A.N : $D = 7.10^{-8}\ \mathrm{m^2.s^{-1}}$ et $\xi(24h) =$ <u>11 cm</u>
