

3.2 Diffusion de particules-Exercice 5

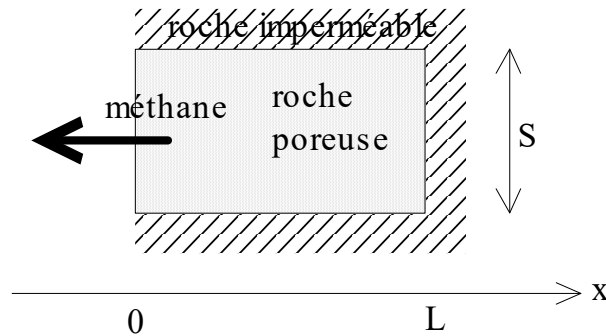
On modélise un gisement de gaz naturel par une roche poreuse cylindrique de volume $V = SL$ contenant un volume qV de méthane où la constante $q < 1$ est la porosité de la roche.

La section $x = 0$ modélise le puits d'extraction où la pression est $P_0 = 1$ bar. On suppose la température uniforme $T = 300$ K.

On note $P(x,t)$ et $\mu(x,t)$ la pression et la masse volumique du méthane (gaz de masse molaire $M = 16 \text{ g.mol}^{-1}$).

L'écoulement du gaz naturel obéit à la loi de Darcy : la masse dm de gaz qui traverse une section S de la roche d'abscisse x pendant une durée dt , comptée positivement dans le sens des x croissants, est de la forme :

$$dm = -\frac{k}{v} \frac{\partial P}{\partial x} S dt \quad \text{où } v \text{ est la viscosité cinématique du méthane et } k \text{ la perméabilité de la roche.}$$



a-Donner une relation entre P et μ .

b-Justifier le signe $-$ de la loi de Darcy.

c-En établissant un bilan de matière entre x et $x+dx$, établir que : $\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$.

Exprimer D en fonction de k , R , T , q , v et M . On prendra $D = 3.10^{-2} \text{ S.I}$ et $q = 0,15$.

d-On cherche une solution du type $P(x,t) = P_0 + P_1 \sin(ax) \exp(-t/\tau)$.

Donner les différentes valeurs possibles de a en fonction de L . Dans la suite on prendra la plus petite.

e-En déduire τ .

f-Exprimer la masse $m(t)$ de méthane dans le gisement à l'instant t .

g-Sachant que $P_1 = 100P_0$ et $L = 5 \text{ km}$, calculer le temps d'extraction de 95% du méthane.

3.2 Diffusion de particules-Exercice 5

a-En supposant que le méthane est un gaz parfait : $PV = \frac{m}{M}RT$ D'où : $\mu = \frac{MP}{RT}$

b-Le méthane s'écoule depuis les zones de forte pression vers les zones de basse pression.

Si l'on suppose $\frac{\partial P}{\partial x} > 0$ (pression croissante vers la droite) alors l'écoulement doit se faire vers la gauche.

La surface S (orientée arbitrairement vers la droite) va être traversée dans le sens négatif : $dm < 0$

Le signe - permet donc d'avoir dm et $\frac{\partial P}{\partial x}$ de signes opposés.

c-Bilan de masse de méthane pour le volume élémentaire Sdx compris entre x et $x + dx$, entre t et $t + dt$:

masse à $t + dt$ = masse à t + masse « entrante » en x pendant dt + masse « entrante » en $x+dx$ pendant dt

$$\mu(x, t + dt)qSdx = \mu(x, t)qSdx + dm(x, t) + (-dm(x + dx, t))$$

(signe - car la surface S en $x+dx$ est orientée dans le sens entrant donc selon le sens négatif de l'axe Ox)

$$\mu(x, t + dt)qSdx = \mu(x, t)qSdx + \left(-\frac{k}{v} \frac{\partial P}{\partial x}(x, t)Sdt\right) + \left(\frac{k}{v} \frac{\partial P}{\partial x}(x + dx, t)Sdt\right)$$

$$[\mu(x, t + dt) - \mu(x, t)]qSdx = \frac{k}{v} \left(\frac{\partial P}{\partial x}(x + dx, t) - \frac{\partial P}{\partial x}(x, t)\right)Sdt$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}(x, t)dtqSdx = \frac{k}{v} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x, t)dxSdt \quad \text{On peut simplifier par } Sdxdt \text{ et remplacer } \mu \text{ en fonction de } P$$

$$\text{On obtient : } \frac{M}{RT}q \frac{\partial P}{\partial t}(x, t) = \frac{k}{v} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x, t) \quad \text{Soit : } \frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad \text{avec : } D = \frac{kRT}{vMq}$$

d-Conditions aux limites : $P(0, t) = P_0$ c'est vérifié par la forme proposée

$dm(x=L, t) = 0$ car la roche est imperméable donc le méthane ne la traverse pas en $x = L$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x}(x=L, t) = aP_1 \cos(aL)e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$$

$$\Rightarrow aL = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \text{ entier} \quad \text{Dans la suite on prend : } a = \frac{\pi}{2L}$$

e-On injecte $P(x, t) = P_0 + P_1 \sin(ax) \exp(-t/\tau)$ dans $\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$:

$$-\frac{1}{\tau} P_1 \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} = D \left(-\frac{\pi^2}{4L^2}\right) P_1 \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{d'où : } \tau = \frac{4L^2}{\pi^2 D}$$

$$f- m(t) = \iiint_{\text{gisement}} \mu(x, t)qSdx = qS \frac{M}{RT} \int_0^L P(x, t)dx = qS \frac{M}{RT} \int_0^L \left[P_0 + P_1 \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}\right] dx$$

$$m(t) = \frac{MqS}{RT} \left(P_0 L + P_1 e^{-\frac{t}{\tau}} \left(-\frac{2L}{\pi}\right) \left[\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right]_0^L \right)$$

$$\text{Finalement : } m(t) = \frac{MqSL}{RT} \left(P_0 + \frac{2P_1}{\pi} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

g-A l'instant final t_f il reste dans le gisement 5% de la masse initiale. On résout donc : $m(t_f) = 0,05m(0)$

$$\frac{MqSL}{RT} \left(P_0 + \frac{2P_1}{\pi} e^{-\frac{t_f}{\tau}} \right) = 0,05 \frac{MqSL}{RT} \left(P_0 + \frac{2P_1}{\pi} \right) \Rightarrow \frac{2P_1}{\pi} e^{-\frac{t_f}{\tau}} = 0,05 \frac{2P_1}{\pi} - 0,95P_0$$

$$\text{D'où : } t_f = -\tau \ln\left(0,05 - \frac{0,95\pi P_0}{2P_1}\right)$$

$$\text{A.N : } t_f = 1,13 \cdot 10^9 \text{ s} = 13100 \text{ jours} = 36 \text{ ans}$$