

Chapitre 33

Notions de géométrie affine et application aux systèmes linéaires

1 Hyperplans

Dans ce paragraphe, on se fixe un corps K et un K -espace vectoriel E .

1.1 Formes linéaires

Rappelons qu'une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans K , *i.e.* un élément de $E^* = \mathcal{L}(E, K)$.

Proposition 1.1

Une forme linéaire sur E est soit nulle, soit surjective, et dans ce dernier cas, elle est de rang 1.

Démonstration.

Soit f une forme linéaire sur E . L'image de f est incluse dans K qui est un K -espace vectoriel de dimension 1. Le rang de f est donc égal à 0 ou à 1. Dans le premier cas, $f = 0$, et dans le deuxième, f est surjective. ■

Définition 1.2 (Formes coordonnées)

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E . Pour tout $i \in I$, on définit la forme coordonnée d'indice i e_i^* par

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$

Proposition 1.3

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E . Soit $x \in E$ et $i \in I$. Alors $e_i^*(x)$ est la coordonnée d'indice i de x , et $\text{Ker}(e_i^*)$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs dont la coordonnée d'indice i est nulle.

Remarque.

Attention : les formes coordonnées de chaque vecteur de la base dépendent non seulement du vecteur en question, mais aussi de toute la base. Par exemple, dans \mathbb{R}^2 , si (e_1, e_2) est la base canonique, et $(f_1, f_2) = ((1, 1), (0, 1))$, on a $e_2 = f_2$, mais $e_2^* \neq f_2^*$, car $(1, 1) = e_1 + e_2 = f_1$, donc $e_2^*((1, 1)) = 1$ et $f_2^*((1, 1)) = 0$.

1.2 Hyperplans

Définition 1.4 (Hyperplan)

Un hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Exemples.

1. Évaluation en a des polynômes.
2. Intégrale sur un segment I sur $\mathcal{C}^0(I)$.

Proposition 1.5

Soit H un hyperplan de E , et D une droite vectorielle non contenue dans H . Alors $E = H \oplus D$.

Plus généralement, si $x \notin H$, alors $E = H \oplus \text{vect}(x)$.

Démonstration.

On a bien sûr $H \cap D = \{0\}$. Mais si $H = \text{Ker}(f)$ avec $f \in E^*$, soit $x_0 \in D$, $x_0 \neq 0$. Si $x \in E$, on a $x = (x - \lambda x_0) + \lambda x_0$, où $\lambda = f(x)/f(x_0)$. ■

Remarque.

Attention : si F est un sous-espace vectoriel, et (e_1, \dots, e_{n-p}) est une famille libre telle que $e_i \notin F$ pour tout $i = 1, \dots, n-p$, on n'a pas nécessairement $F \cap \text{vect}(e_1, \dots, e_{n-p}) = \{0\}$.

Proposition 1.6

Soit H un sous-espace vectoriel de E . Alors H est un hyperplan de E si et seulement s'il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$.

Démonstration.

Si une telle droite D existe, on définit $f \in E^*$ par $f|_H = 0$, et $f(x) = 1$ pour un certain $x \neq 0$ de D .

Réciproquement, si $H = \text{Ker}(f)$ avec $f \in E^*$, soit $x_0 \notin H$, et $D = \text{vect}(x_0)$. On conclut avec 1.5. ■

Proposition 1.7

Deux formes linéaires sur E non nulles sont proportionnelles si et seulement si elles ont même noyau.

Démonstration.

Soient f et g deux formes linéaires non nulles sur E . Si elles sont proportionnelles, elles ont évidemment même noyau.

Réciproquement, notons $H = \text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$. Si $x_0 \notin E$, on a $E = H \oplus Kx_0$. On a $f(x_0) \neq 0$ car sinon f serait nulle, et on a pour tout $x \in E$

$$g(x) = \frac{g(x_0)}{f(x_0)}f(x),$$

puisque cette égalité est vraie si $x \in H$ et si $x \in Kx_0$. ■

1.3 Hyperplans en dimension finie

Dans ce paragraphe, on suppose que E est de dimension finie n .

Proposition 1.8

Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement s'il est de dimension $n - 1$.

Démonstration.

C'est une conséquence de la proposition 1.6. ■

Exemple.

Les droites dans le plan, les plans dans l'espace.

Proposition 1.9 (Matrices des formes linéaires)

Les matrices des formes linéaires sur E sont les matrices lignes de longueur $\dim(E)$.

Proposition 1.10 (Équations d'hyperplan en dimension finie)

Soit H est un hyperplan de E , et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Il existe $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$, non tous nuls, tels que, si $x \in E$ et (x_1, \dots, x_n) sont ses composantes dans \mathcal{B} , alors

$$x \in H \iff \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0.$$

C'est une équation cartésienne de H dans la base \mathcal{B} .

Proposition 1.11

Deux équations d'un même hyperplan dans une même base sont proportionnelles. Réciproquement, deux hyperplans qui ont des équations dans une même base proportionnelles sont égaux.

Proposition 1.12 (Intersection d'un hyperplan et d'un sous-espace vectoriel)

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p , et H un hyperplan de E . Alors

1. Si $F \not\subset H$, $F \cap H$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $p - 1$.
2. Sinon, $H \cap F = F$.

Démonstration.

Si $F \not\subset H$, il existe $x_0 \in F$ tel que $x_0 \notin H$, et alors $E = H \oplus \text{vect}(x_0)$, et donc $E = H + F$. Par la formule de Grassmann, on a donc

$$n = \dim(H + F) = \dim(H) + \dim(F) - \dim(F \cap H),$$

d'où le résultat car $\dim(H) = n - 1$. ■

Proposition 1.13

Soit $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors

1. L'intersection de m hyperplans est un sous-espace vectoriel de E de dimension au moins $n - m$.
2. Tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - m$ est l'intersection de m hyperplans.

Démonstration.

Prouvons le point 1. On raisonne par récurrence sur m , en utilisant la proposition 1.12.

Prouvons le point 2. On considère un sous-espace vectoriel F de E de dimension p . On considère une base (e_1, \dots, e_p) de F que l'on complète en une base (e_1, \dots, e_n) de E . Alors $F = \bigcap_{i=p+1}^n \text{Ker}(e_i^*)$. ■

Remarque.

Cette proposition peut aussi se démontrer à l'aide des systèmes, cf. le dernier paragraphe.

2 Sous-espaces affines

Dans tout ce paragraphe, on fixe un corps K (\mathbb{R} ou \mathbb{C} en général), et un K -espace vectoriel E .

On notera les éléments de E avec des lettres latines majuscules lorsqu'on les considère comme des *points* (par exemple A, B), et des lettres minuscules surmontées d'une flèche lorsqu'on les considère comme des vecteurs (par exemple \vec{u}, \vec{v}).

À tout moment vous devez vous souvenir de ce que vous faites naturellement dans le plan muni d'une origine O : vous avez des points, mais chacun de ces points est l'extrémité d'un vecteur d'origine O .

2.1 Généralités

Rappelons que si $x \in E$ et un sous-espace vectoriel de E , alors $x + G = \{x + u, u \in G\}$.

Lemme 2.1

Soient $A, A' \in E$ et F, F' des sous-espaces vectoriels de E .

1. On a $A + F = A + F' \iff F = F'$.
2. Pour tout $M \in A + F$, on a $M + F = A + F$.
3. On a $A + F = A' + F' \implies F = F'$.

Démonstration.

1. Bien sûr, si $F = F'$, on a $A + F = A + F'$. Réciproquement, supposons $A + F = A + F'$. Soit $\vec{u} \in F$. Alors $A + \vec{u} \in A + F = A + F'$. Il existe donc $\vec{u}' \in F'$ tel que $A + \vec{u} = A + \vec{u}'$, donc $\vec{u} = \vec{u}' \in F'$, et $F \subset F'$. Par symétrie des rôles, on a aussi $F' \subset F$, et donc $F = F'$.
2. Soit $M = A + \vec{u}$ avec $\vec{u} \in F$. Si $\vec{v} \in F$, on a $M + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v}) \in A + F$ car $\vec{u} + \vec{v} \in F$. Mais on a aussi $A + \vec{v} = M - \vec{u} + \vec{v} \in M + F$, donc $M + F = A + F$.
3. On a $A' = A' + 0 \in A' + F'$ donc $A' \in A + F$. D'après 2, on a donc $A + F = A' + F$, et donc $A'F = A' + F'$, et par 1, $F = F'$.

La proposition est démontrée. ■

Définition 2.2 (Sous-espace affine)

Un sous-espace affine \mathcal{F} de E est un sous-ensemble de E du type $A + F$, où $A \in E$ et F est un sous-espace vectoriel de E . Le sous-espace vectoriel F (unique d'après le lemme) s'appelle la *direction* de \mathcal{F} , et \mathcal{F} est *dirigé* par F .

Remarque.

Le point A n'est pas unique.

Exemples.

1. Tous les sous-espaces vectoriels de E sont des sous-espaces affines. Leur direction, c'est eux-même, et le point A , c'est par exemple 0, ou tout vecteur dans le sous-espace vectoriel.
2. Droites, plans,...
3. Deux droites confondues ont mêmes vecteurs directeurs.
4. Si $M \in D$ (où D est une droite), la droite passant par M ayant les mêmes vecteurs directeurs que D est D !

Proposition 2.3

Soit \mathcal{F} un sous-espace affine de E dirigé par F . Pour tout $M \in \mathcal{F}$, on a

$$\mathcal{F} = M + F = \{M + \vec{u}, \vec{u} \in F\}.$$

Démonstration.

Il existe $A \in E$ tel que $\mathcal{F} = A + F$. Alors $A = A + \vec{0} \in \mathcal{F}$. Mais alors, si $M \in \mathcal{F}$, on a $M \in A + F$, et on applique le point 2 du lemme 2.1. ■

Définition 2.4

Soient $A, B \in E$. On définit le vecteur \overrightarrow{AB} par $\overrightarrow{AB} = B - A$.

Remarque.

Ici, $B - A$ signifie $B + (-A)$ dans l'espace vectoriel E .

Proposition 2.5

Soient $A, B, C, M, \vec{u} \in E$. Alors

1. $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ si et seulement si $A = B$.
2. $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.
3. $B = A + \vec{x}$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$.
4. Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
5. On a $M = A + \overrightarrow{AM}$.

Proposition 2.6

Soit \mathcal{F} un sous-espace affine de E dirigé par un sous-espace vectoriel F de E , et $A \in \mathcal{F}$. Alors

1. $F = \{\overrightarrow{AM}, M \in \mathcal{F}\}$.
2. Pour tout $M \in E$, $M \in \mathcal{F} \iff \overrightarrow{AM} \in F$.

Démonstration.

1. Soit M un point de \mathcal{F} . Alors il existe $\vec{u} \in F$ tel que $M = A + \vec{u}$, *i.e.* tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$, donc $\overrightarrow{AM} \in F$.
Réciproquement, si $\vec{u} \in F$, par définition de \mathcal{F} , le point $M = A + \vec{u}$ est dans \mathcal{F} , et $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$.
2. Soit $M \in E$. On vient de voir que si $M \in \mathcal{F}$, alors $\overrightarrow{AM} \in F$.
Réciproquement, si $\overrightarrow{AM} \in F$, alors $M = A + \overrightarrow{AM} \in \mathcal{F}$.

La proposition est démontrée. ■

Définition 2.7 (Hyperplan affine)

Un hyperplan affine de E est un sous-espace affine dont la direction est un hyperplan de E .

Exemple.

Dans le plan et l'espace !

2.2 Translations**Définition 2.8 (Translation)**

Soit $\vec{u} \in E$. La translation de vecteur \vec{u} , notée $t_{\vec{u}}$, est l'application

$$t_{\vec{u}} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & M + \vec{u}. \end{array}$$

Remarque.

Une translation n'est pas une application linéaire, sauf la translation de vecteur nul, qui est alors id_E .

Proposition 2.9

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E$.

1. On a $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$.
2. Une translation est une bijection et $t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}$.

Proposition 2.10 (Image d'un sous-espace affine par une translation)

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E et $\vec{u} \in F$. Alors $t_{\vec{u}}(F) = F$.
2. L'image d'un sous-espace affine par une translation est un sous-espace affine de même direction.
3. Réciproquement, deux sous-espaces affines de même direction sont images l'un de l'autre par une translation. En particulier, un sous-espace affine est l'image de sa direction par une translation.

Démonstration.

1. Si $\vec{v} \in F$, comme $\vec{u} \in F$, on a $\vec{u} + \vec{v} \in F$. Mais réciproquement, $\vec{v} = (\vec{v} - \vec{u}) + \vec{u} \in t_{\vec{u}}(F)$.
2. Il suffit de remarquer que $t_{\vec{u}}(A + F) = (A + \vec{u}) + F = B + F$ où $B = A + \vec{u}$.
3. Soient des sous-espaces affines $A + F$ et $B + F$ (où F est un sous-espace vectoriel de E). Alors $B + F = t_{\vec{AB}}(A + F)$.

La proposition est démontrée. ■

Exemple.

Faites une translation d'une droite dans le plan par exemple.

2.3 Intersection**Proposition 2.11 (Intersection de sous-espaces affines)**

L'intersection de deux sous-espaces affines de directions respectives F et G est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $F \cap G$.

Démonstration.

Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, considérons $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Alors $\mathcal{F} = A + F$ et $\mathcal{G} = A + G$, et alors $M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ si et seulement s'il existe $\vec{u} \in F$ et $\vec{v} \in G$ tel que $M = A + \vec{u} = A + \vec{v}$, ce qui est équivalent à dire que $\vec{u} = \vec{v} \in F \cap G$. ■

Proposition 2.12

Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux sous-espaces affines de E de directions respectives F et G .

1. Si $E = F + G$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$.

2. Si $E = F \oplus G$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est réduit à un point.

Démonstration.

1. Si $\mathcal{F} = A + F$ et $\mathcal{G} = B + G$, il existe $\vec{u} \in F$ et $\vec{v} \in G$ tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$. On a alors $A + \vec{u} = B - \vec{v} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.
2. Le premier prouve que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est non vide. C'est donc un sous-espace affine de direction $F \cap G = \{0\}$, donc un point.

La proposition est démontrée. ■

Exemples.

1. Deux droites du plan peuvent être parallèles.
2. Une droite de l'espace peut être parallèle à un plan.

3 Systèmes linéaires

On fixe dans ce paragraphe deux entiers $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $r = \text{rang}(A)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in K^n$ et

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(K).$$

Définition 3.1 (Système linéaire)

1. Le système à n lignes et p inconnues de matrice A et de second membre B est le système

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

d'inconnue $(x_1, \dots, x_p) \in K^p$.

2. Le système est *homogène* si $B = 0$.
3. Le système homogène associé (S_0) est le système obtenu en remplaçant B par 0.
4. Le *rang* du système est le rang de A .
5. Le système est *compatible* s'il admet au moins une solution.

Remarque.

Rappelons que deux systèmes linéaires sont *équivalents* s'ils admettent même ensemble de solutions.

Proposition 3.2 (Différentes façons d'interpréter un système)

On fixe $x = (x_1, \dots, x_p) \in K^p$.

1. x est une solution de (S) si et seulement si $AX = B$, où

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(K).$$

2. Soit $u \in \mathcal{L}(K^p, K^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à A . Alors x est une solution de (S) si et seulement si $u(x) = b$, et (S) est compatible si et seulement si $b \in \text{Im}(u)$.

3. Soient $C_1, \dots, C_p \in K^n$ les colonnes de A vues comme vecteurs de K^n . Alors x est solution de (S) si et seulement si

$$\sum_{j=1}^p x_j C_j = B,$$

et (S) est compatible si et seulement si $B \in \text{vect}(C_1, \dots, C_p)$.

4. Soient $f_1, \dots, f_n \in (K^p)^*$ les formes linéaires canoniquement associées aux lignes L_1, \dots, L_n de A . Alors x est solution de (S) si et seulement si

$$\forall k = 1, \dots, n, f_k(x) = b_k.$$

Démonstration.

- C'est une réécriture du système.
- C'est une conséquence directe de 1, car $u(x) = b$ si et seulement si $AX = B$.
- Là encore, c'est une réécriture : au lieu de mettre n lignes, on les met ensemble, et on sépare les variables en colonnes.
- Par définition de f_k , on a $f_k(x) = a_{k1}x_1 + \dots + a_{kp}x_p$, *i.e.* c'est le premier membre de la ligne k .

La proposition est démontrée. ■

Proposition 3.3 (Structure de l'ensemble des solutions)

- L'ensemble G_0 des solutions de (S_0) est le noyau de u . C'est un sous-espace vectoriel de K^p de dimension $p - r$.
- L'ensemble \mathcal{G} des solutions de (S) est soit vide, soit un sous-espace affine de K^p de direction G_0 , *i.e.* si $\mathcal{G} \neq \emptyset$, et si $x \in K^p$ est une solution de (S) , alors

$$\mathcal{G} = x + G_0.$$

Démonstration.

- Par définition, le système homogène est équivalent à l'équation $u(x) = 0$, *i.e.* à $x \in \text{Ker}(u)$. Par le théorème du rang, sa dimension est $\dim(K^p) - \text{rang}(u) = p - r$.

2. Si $\mathcal{G} \neq \emptyset$, et $x \in \mathcal{G}$, on a pour $x' \in K^p : x' \in \mathcal{G} \iff u(x') = u(x) \iff x' - x \in \text{Ker}(u) \iff x' - x \in \mathcal{G}_0$.

La proposition est démontrée. ■

Définition 3.4 (Système de Cramer)

Le système (S) est de Cramer si $n = p$ et s'il admet exactement une solution.

Proposition 3.5

1. Le système (S) est de Cramer si et seulement $n = p$ et si A est inversible.
2. Si u est injective (resp. surjective, bijective), (S) admet au plus (resp. au moins, exactement) une solution.
3. Si les colonnes C_1, \dots, C_p de A sont linéairement indépendantes, (S) admet au plus une solution.

Démonstration.

1. Supposons $n = p$. Si A est inversible, on a $AX = B \iff X = A^{-1}B$ et le système admet une unique solution. Réciproquement, d'après le point 2 de la proposition 3.3, on a $G_0 = \{0\}$, donc u est injective, donc est un isomorphisme car $u \in \mathcal{L}(K^p)$, *i.e.* A est inversible.
2. C'est clair.
3. Dans ce cas, le rang de A est p , donc $G_0 = \{0\}$, et d'après la proposition 3.3, \mathcal{G} est soit vide, soit contient un point.

La proposition est démontrée. ■

Proposition 3.6

Le sous-espace vectoriel G_0 est l'intersection de r hyperplans de K^p .

Démonstration.

Conséquence de la proposition 1.13. Ou directement.

Par définition, $G_0 = \bigcap_{k=1}^r \text{Ker}(f_k)$, où les f_k sont définies dans la proposition 3.2. Il reste à démontrer qu'il suffit de prendre r de ces noyaux pour obtenir G_0 . Mais par définition du rang, il y a r formes linéaires linéairement indépendantes, les $n - r$ autres étant des combinaisons linéaires des r autres. Quitte à échanger les lignes du système, disons que les r premières sont linéairement indépendantes, et les suivantes liées avec les r premières.

Mais alors si $k > r$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in K^r$ tel que $f_k = \sum_{j=1}^r \lambda_j f_j$. Si $x \in \bigcap_{j=1}^r \text{Ker}(f_j)$, on a donc $f_k(x) = 0$, *i.e.* $x \in \text{Ker}(f_k)$, donc

$$\bigcap_{j=1}^r \text{Ker}(f_j) \subset \text{Ker}(f_k),$$

et donc

$$\bigcap_{j=1}^r \text{Ker}(f_j) = \bigcap_{j=1}^n \text{Ker}(f_j) = G_0.$$

■

Proposition 3.7

Si $n = p$ et A est triangulaire, le système (S) est de Cramer si et seulement si les éléments de la diagonale de A sont tous non nuls.

Démonstration.

Le déterminant de A est le produit des éléments de la diagonale : il est donc non nul, et $A \in GL_n(K)$, donc le système est de Cramer. ■

Proposition 3.8

1. Si $r = n \leq p$, le système (S) est équivalent à un système du type

$$\begin{cases} a'_{11}x_{i_1} + \dots + a'_{1r}x_{i_r} + \dots + a'_{1p}x_{i_p} = b'_1 \\ \vdots \\ a'_{rr}x_{i_r} + \dots + a'_{rp}x_{i_p} = b'_r \end{cases},$$

avec

$$\forall i = 1, \dots, r, a'_{ii} \neq 0.$$

Le système est alors compatible et les solutions s'expriment en fonction des inconnues $x_{i_{r+1}}, \dots, x_{i_p}$, qui deviennent des paramètres.

2. Si $r < n$, le système (S) est équivalent à un système du type

$$\begin{cases} a'_{11}x_{i_1} + \dots + a'_{1r}x_{i_r} + \dots + a'_{1p}x_{i_p} = b'_1 \\ \vdots \\ a'_{rr}x_{i_r} + \dots + a'_{rp}x_{i_p} = b'_r \\ 0 = b'_{r+1} \\ \vdots \\ 0 = b'_n \end{cases},$$

et le système est compatible si et seulement si $b'_{r+1} = \dots = b'_n = 0$.

Démonstration.

1. On fait une récurrence sur n . Il existe une équation dans laquelle un coefficient est non nul (en fait, dans toutes les lignes car aucune n'est nulle). On échange cette ligne avec la première, et on met la colonne du coefficient non nul en premier. Puis on effectue un pivot de Gauss avec ce pivot. On obtient donc une première ligne du type

$$a'_{11}x_{i_1} + \dots + a'_{1r}x_{i_r} + \dots + a'_{1p}x_{i_p} = b'_1,$$

et $n - 1$ équations sans l'inconnue éliminée, *i.e.* $p - 1$ inconnues. Mais le rang de ces $n - 1$ équations est $r - 1$, puisque la première est linéairement indépendante avec les $n - 1$ qui nous restent. On applique alors l'hypothèse de récurrence.

2. Il y a r équations linéairement indépendantes, que l'on met en premier. Par des combinaisons linéaires, on peut mettre à 0 le premier membre des $n - r$ restantes. Les combinaisons correspondantes sur les seconds membres donnent les b'_{r+1}, \dots, b'_n . Puis on applique 1 aux r premières équations.

Ceci termine la démonstration. ■

Remarques.

1. Cette démonstration est en fait ce qu'on fait systématiquement pour résoudre un système!
2. Les deux cas n'en font en fait qu'un : le cas 2, s'il ne finit pas avec une (ou des) ligne nulle, est en fait le cas 1. C'est un algorithme qui peut se programmer, et dont on peut donner l'expression en pseudo-langage.

Exemple.

$$\text{Résoudre } \begin{cases} y + 2z + t = b_1 \\ x + 2y + z + t = b_2 \\ 2x + y - t = b_3 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} y + 2z + t = b_1 \\ 2x + 2y + 2z = b_2 \\ 2x + y - t = b_3 \end{cases} .$$

4 Compétences

Pour résoudre un système, on utilisera impérativement la technique de manipulation sur les lignes. Pour un système à n équations et p inconnues, on procède ainsi :

1. On choisit tout d'abord une inconnue et une équation : cette équation est la ligne pivot. On place cette équation en premier, et également l'inconnue choisie, et ce dans toutes les équations. Le coefficient de cette inconnue est le pivot.
2. Pour chacune des équations restantes, on élimine l'inconnue choisie en faisant une combinaison linéaire entre cette équation et la ligne pivot.
3. Il reste alors l'équation pivot, et un système de $n - 1$ équations à $p - 1$ inconnues. On recommence alors le procédé avec ce système.
4. Finalement, il reste un système triangulaire, dans le sens où le nombre d'inconnues dans chaque équation diminue de 1 à chaque équation, ou passe à 0.
 - S'il y a une ou plusieurs équations où toutes les inconnues ont été éliminées, et il ne reste que des seconds membres, ces équations deviennent des conditions nécessaires et suffisantes pour que le système admette des solutions. Si ces conditions sont vérifiées (ou on discute pour qu'elles le soient), on continue la résolution comme ce qui suit.
 - Sinon, si dans une équation (la dernière!) il reste une et une seule inconnue, cette équation donne la valeur de l'inconnue en question, et on résout le système de proche en proche en remontant les équations.
 - Si dans toutes les équations restantes il y a au moins deux inconnues, certaines inconnues vont jouer le rôle de paramètres, les autres s'exprimant en fonction de ces paramètres. On considère la dernière équation (*i.e.* celles qui a le moins d'inconnues), on exprime une des inconnues en fonctions des autres, qui deviennent les paramètres du système, et on continue la résolution de proche en proche, toutes les inconnues qui restent s'exprimeront en fonctions des paramètres.
 - Lorsque le système contient des paramètres, on ne fait pas de manipulations qui entraînent des cas particuliers : par exemple l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + mL_2$ donnera un système équivalent même pour $m = 0$, mais pas l'opération $L_1 \leftarrow mL_1 + L_2$.

Attention : on ne choisit jamais comme pivot un coefficient ou un paramètre qui peut s'annuler. De même, on ne divise jamais une équation par un paramètre sans avoir au préalable étudié le cas où il est nul.