Chapitre 33

Notions de géométrie affine et application aux systèmes linéaires

1 Hyperplans

Dans ce paragraphe, on se fixe un corps K et un K-espace vectoriel E.

1.1 Formes linéaires

Rappelons qu'une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans K, *i.e.* un élément de $E^* = \mathcal{L}(E, K)$.

Proposition 1.1

Une forme linéaire sur E est soit nulle, soit surjective, et dans ce dernier cas, elle est de rang 1.

Définition 1.2 (Formes coordonnées)

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E. Pour tout $i \in I$, on définit la forme coordonnée d'indice i e_i^* par

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$

Proposition 1.3

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E. Soit $x \in E$ et $i \in I$. Alors $e_i^*(x)$ est la coordonnée d'indice i de x, et $\mathrm{Ker}(e_i^*)$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs dont la coordonnées d'indice i est nulle.

1.2 Hyperplans

Définition 1.4 (Hyperplan)

Un hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Proposition 1.5

Soit H un hyperplan de E, et D une droite vectorielle non contenue dans H. Alors $E = H \oplus D$.

Plus généralement, si $x \notin H$, alors $E = H \oplus \mathrm{vect}(x)$.

Proposition 1.6

Soit H un sous-espace vectoriel de E. Alors H est un hyperplan de E si et seulement s'il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$.

Proposition 1.7

Deux formes linéaires sur E non nulles sont proportionnelles si et seulement si elles ont même noyau.

1.3 Hyperplans en dimension finie

Dans ce paragraphe, on suppose que E est de dimension finie n.

Proposition 1.8

Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement s'il est de dimension $n-1$.

Proposition 1.9 (Matrices des formes linéaires)

Les matrices des formes linéaires sur E sont les matrices lignes de longueur $\dim(E)$.

Proposition 1.10 (Équations d'hyperplan en dimension finie)

Soit H est un hyperplan de E, et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Il existe $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$, non tous nuls, tels que, si $x \in E$ et $(x_1, \dots, x_n)$ sont ses composantes dans $\mathcal{B}$, alors

$$x \in H \iff \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0.$$

C'est une équation cartésienne de H dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 1.11

Deux équations d'un même hyperplan dans une même base sont proportionnelles. Réciproquement, deux hyperplans qui ont des équations dans une même base proportionnelles sont égaux.

Proposition 1.12 (Intersection d'un hyperplan et d'un sous-espace vectoriel)

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p, et H un hyperplan de E. Alors

1. Si $F \not\subset H$, $F \cap H$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $p-1$.
2. Sinon, $H \cap F = F$.

Proposition 1.13

Soit $m \in [\![0, n]\!]$. Alors

1. L'intersection de m hyperplans est un sous-espace vectoriel de E de dimension au moins $n-m$.
2. Tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n-m$ est l'intersection de m hyperplans.

2 Sous-espaces affines

Dans tout ce paragraphe, on fixe un corps K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ en général), et un K-espace vectoriel E.

On notera les éléments de E avec des lettres latines majuscules lorqu'on les considère comme des *points* (par exemple A, B), et des lettres minuscules surmontées d'une flèche lorsqu'on les considère comme des vecteurs (par exemple $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$).

À tout moment vous devez vous souvenir de ce que vous faîtes naturellement dans le plan muni d'une origine O : vous avez des points, mais chacun de ces points est l'extrémité d'un vecteur d'origine O.

2.1 Généralités

Rappelons que si $x \in E$ et un sous-espace vectoriel de E, alors $x + G = \{x + u,\ u \in G\}$.

Lemme 2.1

Soient $A, A' \in E$ et F, F' des sous-espaces vectoriels de E.

1. On a $A + F = A + F' \iff F = F'$.
2. Pour tout $M \in A + F$, on a $M + F = A + F$.
3. On a $A + F = A' + F' \Longrightarrow F = F'$.

Définition 2.2 (Sous-espace affine)

Un sous-espace affine $\mathcal{F}$ de E est un sous-ensemble de E du type $A + F$, où $A \in E$ et F est un sous-espace vectoriel de E. Le sous-espace vectoriel F (unique d'après le lemme) s'appelle la *direction* de $\mathcal{F}$, et $\mathcal{F}$ est *dirigé* par F.

Proposition 2.3

Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E dirigé par F. Pour tout $M \in \mathcal{F}$, on a

$$\mathcal{F} = M + F = \{M + \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u} \in F\}.$$

Définition 2.4

Soient $A, B \in E$. On définit le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AB} = B - A$.

Proposition 2.5

Soient $A, B, C, M, \overrightarrow{u} \in E$. Alors

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $A = B$.
2. $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.
3. $B = A + \overrightarrow{x}$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{x}$.
4. Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
5. On a $M = A + \overrightarrow{AM}$.

Proposition 2.6

Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E dirigé par un sous-espace vectoriel F de E, et $A \in \mathcal{F}$. Alors

1. $F = \{\overrightarrow{AM},\ M \in \mathcal{F}\},.$

2. Pour tout $M \in E$, $M \in \mathcal{F} \iff \overrightarrow{AM} \in F$.

Définition 2.7 (Hyperplan affine)

Un hyperplan affine de E est un sous-espace affine dont la direction est un hyperplan de E.

2.2 Translations

Définition 2.8 (Translation)

Soit $\overrightarrow{u} \in E$. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, notée $t_{\overrightarrow{u}}$, est l'application

$$t_{\overrightarrow{u}} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & M + \overrightarrow{u}. \end{array}$$

Proposition 2.9

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$.

1. On a $t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}$.

2. Une translation est une bijection et $t_{\overrightarrow{u}}^{-1} = t_{-\overrightarrow{u}}$.

Proposition 2.10 (Image d'un sous-espace affine par une translation)

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E et $\overrightarrow{u} \in F$. Alors $t_{\overrightarrow{u}}(F) = F$.

2. L'image d'un sous-espace affine par une translation est un sous-espace affine de même direction.

3. Reciproquement, deux sous-espaces affines de même direction sont images l'un de l'autre par une translation. En particulier, un sous-espace affine est l'image de sa direction par une translation.

2.3 Intersection

Proposition 2.11 (Intersection de sous-espaces affines)

L'intersection de deux sous-espaces affines de directions respectives F et G est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $F \cap G$.

Proposition 2.12

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E de directions respectives F et G.

1. Si $E = F + G$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$.

2. Si $E = F \oplus G$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est réduit à un point.

3 Systèmes linéaires

On fixe dans ce paragraphe deux entiers $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $r = \mathrm{rang}(A)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in K^n$ et

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(K).$$

Définition 3.1 (Système linéaire)

1. Le système à n lignes et p inconnues de matrice A et de second membre B est le système

$$(S) \ : \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

d'inconnue $(x_1, \dots, x_p) \in K^p$.

2. Le système est *homogène* si $B = 0$.

3. Le système homogène associé (S_0) est le système obtenu en remplaçant B par 0.

4. Le *rang* du système est le rang de A.

5. Le système est *compatible* s'il admet au moins une solution.

Proposition 3.2 (Différentes façons d'interpréter un système)

On fixe $x = (x_1, \dots, x_p) \in K^p$.

1. x est une solution de (S) si et seulement si $AX = B$, où

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(K).$$

2. Soit $u \in \mathcal{L}(K^p, K^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à A. Alors x est une solution de (S) si et seulement si $u(x) = b$, et (S) est compatible si et seulement si $b \in \mathrm{Im}(u)$.

3. Soient $C_1, \dots, C_p \in K^n$ les colonnes de A vues comme vecteurs de K^n. Alors x est solution de (S) si et seulement si

$$\sum_{j=1}^{p} x_j C_j = B,$$

et (S) est compatible si et seulement si $B \in \mathrm{vect}(C_1, \dots, C_p)$.

4. Soient $f_1, \dots, f_n \in \left(K^p\right)^*$ les formes linéaires canoniquement associées aux lignes $L_1, \dots, L_n$ de A. Alors x est solution de (S) si et seulement si

$$\forall\, k = 1, \dots, n,\ f_k(x) = b_k.$$

Proposition 3.3 (Structure de l'ensemble des solutions)

1. L'ensemble G_0 des solutions de (S_0) est le noyau de u. C'est un sous-espace vectoriel de K^p de dimension $p-r$.

2. L'ensemble $\mathcal{G}$ des solutions de (S) est soit vide, soit un sous-espace affine de K^p de direction G_0, *i.e.* si $\mathcal{G} \neq \emptyset$, et si $x \in K^p$ est une solution de (S), alors

$$\mathcal{G} = x + G_0.$$

Définition 3.4 (Système de Cramer)

Le système (S) est de Cramer si $n = p$ et s'il admet exactement une solution.

Proposition 3.5

1. Le système (S) est de Cramer si et seulement $n = p$ et si A est inversible.

2. Si u est injective (resp. surjective, bijective), (S) admet au plus (resp. au moins, exactement) une solution.

3. Si les colonnes $C_1, \dots, C_p$ de A sont linéairement indépendantes, (S) admet au plus une solution.

Proposition 3.6

Le sous-espace vectoriel G_0 est l'intersection de r hyperplans de K^p.

Proposition 3.7

Si $n = p$ et A est triangulaire, le système (S) est de Cramer si et seulement si les éléments de la diagonale de A sont tous non nuls.

Proposition 3.8

1. Si $r = n \leqslant p$, le système (S) est équivalent à un système du type

$$\left\{\begin{array}{rl} a'_{11}x_{i_1} + \cdots + a'_{1r}x_{i_r} + \cdots + a'_{1p}x_{i_p} &= b'_1 \\ \vdots \qquad\qquad & \\ a'_{rr}x_{i_r} + \cdots + a'_{rp}x_{i_p} &= b'_r \end{array}\right. ,$$

avec

$$\forall\, i = 1, \dots, r,\ a'_{ii} \neq 0.$$

Le système est alors compatible et les solutions s'expriment en fonction des inconnues $x_{i_{r+1}}, \dots, x_{i_p}$, qui deviennent des paramètres.

2. Si $r < n$, le système (S) est équivalent à un système du type

$$\left\{\begin{array}{rl} a'_{11}x_{i_1} + \cdots + a'_{1r}x_{i_r} + \cdots + a'_{1p}x_{i_p} &= b'_1 \\ \vdots \qquad\qquad & \\ a'_{rr}x_{i_r} + \cdots + a'_{rp}x_{i_p} &= b'_r \\ 0 &= b'_{r+1} \\ &\vdots \\ 0 &= b'_n \end{array}\right. ,$$

et le système est compatible si et seulement si $b'_{r+1} = \cdots = b'_n = 0$.