

Chapitre 34

Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini

Dans tout ce chapitre, on fixe un espace probabilisé fini (Ω, P) .

1 Variables aléatoires

1.1 Définitions

Définition 1.1 (Variable aléatoire)

1. Une variable aléatoire sur Ω est une application définie sur Ω .
2. Une variable aléatoire réelle sur Ω est une application définie sur Ω à valeurs dans \mathbb{R} .

Définition 1.2 (Variable aléatoire constante)

Une variable aléatoire constante (ou certaine) sur l'univers Ω est une fonction constante sur Ω .

Définition 1.3 (Variable indicatrice d'un événement)

Soit A un événement de Ω . La variable indicatrice de A est la variable aléatoire réelle

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Proposition 1.4 (Image d'une variable aléatoire)

Soit X une variable aléatoire sur Ω , et f une fonction définie sur $X(\Omega)$. Alors $f \circ X$ est une variable aléatoire sur Ω , notée $f(X)$.

1.2 Notations

Soit X une variable aléatoire sur Ω , à valeurs dans un ensemble E . On considère également une probabilité P sur Ω , et $A \in \mathcal{P}(E)$.

1. L'événement $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\} \subset \Omega$ se note $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$.
2. Si X est une variable aléatoire réelle, on note
 - $(X = x) = \{X = x\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\} = X^{-1}(\{x\})$.
 - $(X \leq x) = \{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\} = X^{-1}(]-\infty, x])$.
 - $(X \geq x) = \{X \geq x\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \geq x\} = X^{-1}([x, +\infty[)$.
 - $(X < x) = \{X < x\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) < x\} = X^{-1}(]-\infty, x[)$.
 - $(X > x) = \{X > x\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) > x\} = X^{-1}(]x, +\infty[)$.

(Ce sont des événements.)

3. On note $P(X \in A) = P(\{X \in A\})$ et $P(X = x) = P(\{X = x\})$.

Proposition 1.5

Soit $X : \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire sur Ω , et $A, B \subset E$. Alors

$$(X \in A) \cup (X \in B) = (X \in A \cup B), \quad (X \in A) \cap (X \in B) = (X \in A \cap B).$$

Proposition 1.6

Soit $X : \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire sur Ω , et $A \subset E$. Alors

$$(X \in A) = (X \in A \cap X(\Omega)) = \bigcup_{x \in A \cap X(\Omega)} (X = x).$$

1.3 Loi d'une variable aléatoire

On rappelle qu'on a fixé une probabilité P sur Ω .

Théorème 1.7 (Loi de X)

Soit X une variable aléatoire sur Ω . L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X(\Omega)) &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto P(X \in A) \end{aligned}$$

est une probabilité sur $X(\Omega)$, appelée loi de X , et notée P_X .

Proposition 1.8 (Système complet d'événements associé à X)

Soit X une variable aléatoire sur Ω . La famille $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements de Ω , appelé système complet d'événements associé à X . En particulier,

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1.$$

Proposition 1.9

Soit X une variable aléatoire sur Ω . Pour tout $A \subset X(\Omega)$, on a

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x).$$

Autrement dit, la loi de X est entièrement déterminée par la donnée des $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

Méthode 1.10

Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire X , on détermine $X(\Omega)$, et pour tout $x \in X(\Omega)$, on calcule $P(X = x)$.

$$\text{Pour cela, on peut remarquer que } P(X = x) = \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x}} P(\{\omega\}).$$

Proposition 1.11 (Loi de $f(X)$)

Soit X une variable aléatoire sur Ω , et f une application définie sur $X(\Omega)$. La loi de $f(X)$ est donnée par :

$$\forall y \in f(X)(\Omega), P(f(X) = y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} P(X = x),$$

ou encore, si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$,

$$\forall y \in f(X)(\Omega), P(f(X) = y) = \sum_{\substack{i=1 \\ f(x_i) = y}}^n P(X = x_i).$$

2 Lois usuelles

2.1 Loi uniforme

Définition 2.1 (Loi uniforme)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une variable aléatoire X sur Ω suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ si $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$, et si

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

2. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a \leq b$. Une variable aléatoire X sur Ω suit la loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$ si $X(\Omega) = \llbracket a, b \rrbracket$, et si

$$\forall k \in \llbracket a, b \rrbracket, P(X = k) = \frac{1}{b - a + 1}.$$

2.2 Loi de Bernoulli

Définition 2.2 (Loi de Bernoulli)

Soit $p \in [0, 1]$. Une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p si $X(\Omega) \subset \{0, 1\}$, et si $P(X = 1) = p$.

Proposition 2.3

Soit $p \in [0, 1]$ et X une variable de Bernoulli de paramètre p . Alors $P(X = 0) = 1 - p$.

Proposition 2.4 (Indicatrice d'un événement)

1. La variable indicatrice d'un événement A est une variable de Bernoulli, de paramètre $P(A)$.

2. Réciproquement, une variable de Bernoulli X est la variable indicatrice de l'événement ($X = 1$).

Proposition 2.5

Soient X et Y des variables de Bernoulli.

1. On a $X^2 = X$.
2. XY est une variable de Bernoulli.

2.3 Loi binomiale

Définition 2.6 (Loi binomiale)

Soit $p \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Une variable aléatoire sur Ω suit la loi binomiale de paramètre (n, p) si

$$X(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et si} \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Théorème 2.7 (Épreuves de Bernoulli indépendantes)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(E_k)_{1 \leq k \leq n}$ des épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p \in [0, 1]$. Soit X le nombre de succès. Alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

3 Espérance

On fixe un espace probabilisé (Ω, P) .

3.1 Définitions

Définition 3.1 (Espérance)

L'espérance d'une variable aléatoire réelle X est le réel

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x),$$

ou encore, si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$,

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i).$$

Proposition 3.2

Soit X une variable aléatoire réelle sur (Ω, P) . Alors

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega).$$

Définition 3.3 (Variable aléatoire centrée)

Une variable aléatoire réelle centrée est une variable aléatoire d'espérance nulle.

3.2 Espérance des lois usuelles

Proposition 3.4 (Espérance d'une variable indicatrice)

Soit A un événement. Alors $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$.

Proposition 3.5 (Espérance d'une variable aléatoire certaine)

Soit $a \in \mathbb{R}$. L'espérance de la variable aléatoire certaine égale à a est a .

Proposition 3.6 (Espérance d'une loi uniforme)

Soit X une variable aléatoire réelle.

1. Si $X \sim \mathcal{U}([1, n])$, alors $E(X) = \frac{n+1}{2}$.
2. Si $X \sim \mathcal{U}([0, n])$, alors $E(X) = \frac{n}{2}$.
3. Si $X \sim \mathcal{U}([a, b])$, alors $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

Proposition 3.7 (Espérance d'une loi de Bernoulli)

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Bernoulli de paramètre p . Alors $E(X) = p$.

Proposition 3.8 (Espérance d'une loi binomiale)

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale de paramètre (n, p) . Alors $E(X) = np$.

3.3 Linéarité de l'espérance

Proposition 3.9 (Linéarité de l'espérance)

L'espérance est une forme linéaire sur l'espace des variables aléatoires réelles sur Ω , *i.e.* si X et Y sont des variables aléatoires réelles sur Ω , et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y), \quad E(\lambda X) = \lambda E(X).$$

Corollaire 3.10 (Espérance de $aX + b$)

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et X une variable aléatoire réelle sur Ω . Alors $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Corollaire 3.11

Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω . Alors $X - E(X)$ est centrée.

Méthode 3.12 (Décomposition d'une v.a.r. en somme de v.a.r. "simples")

On peut décomposer une v.a.r. X dont on cherche l'espérance en une somme de v.a.r. dont on connaît les espérances.

3.4 Croissance de l'espérance - Inégalité de Markov

Proposition 3.13 (Positivité de l'espérance)

Soit X une variable aléatoire réelle positive sur (Ω, P) . Alors :

1. $E(X) \geq 0$.
2. $E(X) = 0$ si et seulement si $P(X = 0) = 1$.

Proposition 3.14 (Croissance de l'espérance)

Soient X et Y des variables aléatoires réelles sur (Ω, P) , telles que $X \leq Y$. Alors $E(X) \leq E(Y)$.

Théorème 3.15 (Inégalité de Markov)

Soit X une variable aléatoire réelle **positive** sur (Ω, P) . Alors

$$\forall a > 0, P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

3.5 Formule de transfert

Théorème 3.16 (Formule de transfert)

Soit X une variable aléatoire sur (Ω, P) , et $f : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. Alors

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x),$$

ou encore, si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$,

$$E(f(X)) = \sum_{i=1}^n f(x_i)P(X = x_i).$$

4 Variance, écart type

4.1 Variance - Formule de König-Huygens

Définition 4.1 (Moment d'ordre k)

Soit X une variable aléatoire réelle sur (Ω, P) , et $k \in \mathbb{N}$. Le moment d'ordre k de X est $E(X^k)$.

Définition 4.2 (Variance)

Soit X une variable aléatoire réelle sur (Ω, P) . La variance $V(X)$ de X est le moment d'ordre 2 de $X - E(X)$, *i.e.*

$$V(X) = E((X - E(X))^2).$$

Proposition 4.3 (Formule de König-Huygens)

Soit X une variable aléatoire réelle sur (Ω, P) . Alors

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Méthode 4.4

On utilise la formule de König-Huygens pour calculer la variance.

Méthode 4.5

Pour calculer $E(X^2)$, on est parfois amené à calculer $E(X(X+1))$ ou $E(X(X-1))$, ce qui permet d'obtenir $E(X^2)$ par linéarité, en connaissant $E(X)$.

4.2 Propriétés de la variance

Proposition 4.6

Soit X une variable aléatoire réelle sur (Ω, P) .

1. $V(X) \geq 0$.
2. $V(X) = 0$ si et seulement si $P(X = E(X)) = 1$.

Proposition 4.7

Soit X une variable aléatoire réelle sur (Ω, P) , et soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$V(aX + b) = a^2V(X).$$

En particulier, $V(X + b) = V(X)$.

4.3 Variance des lois usuelles

Proposition 4.8 (Variance d'une variable indicatrice)

Soit A un événement. Alors $V(\mathbb{1}_A) = P(A)(1 - P(A))$.

Proposition 4.9 (Variance d'une variable aléatoire certaine)

Soit $a \in \mathbb{R}$. La variance de la variable aléatoire certaine égale à a est 0.

Proposition 4.10 (Variance d'une loi uniforme)

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit la loi uniforme sur $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{Z}$, $a \leq b$). Alors

$$V(X) = \frac{(b - a + 1)^2 - 1}{12}.$$

En particulier, si $X \sim [1, n]$ ($n \in \mathbb{N}$), alors $V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$.

Proposition 4.11 (Variance d'une loi de Bernoulli)

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Bernoulli de paramètre p . Alors $V(X) = p(1 - p)$.

Proposition 4.12 (Variance d'une loi binomiale)

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale de paramètre (n, p) .
Alors $V(X) = np(1 - p)$.

4.4 Écart type**Définition 4.13 (Écart-type)**

Soit X une variable aléatoire réelle sur (Ω, P) . Son écart-type est le réel

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Définition 4.14 (Variable réduite)

Une variable aléatoire réelle X sur (Ω, P) est réduite si $\sigma(X) = 1$.

Proposition 4.15 (Variable centrée réduite associée à X)

Soit X une variable aléatoire réelle sur (Ω, P) telle que $V(X) > 0$. La variable aléatoire réelle $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite, appelée variable centrée réduite associée à X .

4.5 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**Théorème 4.16 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)**

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur (Ω, P) . Alors

$$\forall \varepsilon > 0, P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

5 Couples de variables aléatoires**5.1 Définitions****Définition 5.1 (Couple de variables aléatoires)**

Soient $X : \Omega \rightarrow E$ et $Y : \Omega \rightarrow E'$ des variables aléatoires. Le couple des variables aléatoires (X, Y) est la fonction

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow E \times E' \\ \omega &\longmapsto (X(\omega), Y(\omega)). \end{aligned}$$

Lorsque $E = E' = \mathbb{R}$, on a un couple de variables aléatoires réelles.

Proposition 5.2 (Système complet d'événements d'un couple de v.a.r.)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles sur Ω . La famille $\left((X = x) \cap (Y = y) \right)_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements, appelé système complet d'événement associé au couple (X, Y) .

Corollaire 5.3

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles sur Ω . Alors

$$\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} P((X = x) \cap (Y = y)) = 1,$$

ou encore, si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_m\}$,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = 1.$$

5.2 Loi conjointe et lois marginales**Définition 5.4 (Loi conjointe)**

Soient X et Y deux variables aléatoires sur l'espace probabilisé (Ω, P) . La loi conjointe de X et Y est la probabilité sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ définie par

$$\begin{aligned} X(\Omega) \times Y(\Omega) &\longrightarrow [0, 1] \\ (x, y) &\longmapsto P(X = x, Y = y). \end{aligned}$$

Définition 5.5 (Lois marginales)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. La loi de X est la première loi marginale de (X, Y) , et la loi de Y est la deuxième loi marginale de (X, Y) .

Théorème 5.6 (Lois marginales à partir de la loi conjointe)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur Ω . Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_p\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_m\}$, alors

$$\begin{aligned} \forall i \in [1, p], P(X = x_i) &= \sum_{j=1}^m P(X = x_i, Y = y_j), \\ \forall j \in [1, m], P(Y = y_j) &= \sum_{i=1}^p P(X = x_i, Y = y_j). \end{aligned}$$

5.3 Espérance d'un produit**Proposition 5.7 (Espérance d'un produit)**

Soient X et Y des variables aléatoires réelles sur (Ω, P) . Alors

$$E(XY) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xyP(X = x, Y = y),$$

ou encore, si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_m\}$,

$$E(XY) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j P(X = x_i, Y = y_j).$$

5.4 Lois conditionnelles

Définition 5.8 (Lois conditionnelles)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur l'espace probabilisé (Ω, P) .

1. Soit $y \in Y(\Omega)$ tel que $P(Y = y) \neq 0$. La loi de X sachant $(Y = y)$ est la loi de X dans l'espace probabilisé $(\Omega, P_{(Y=y)})$. Elle est donc déterminée pour tout $x \in X$ par :

$$P_{(Y=y)}(X = x) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

2. Soit $x \in X(\Omega)$ tel que $P(X = x) \neq 0$. La loi de Y sachant $(X = x)$ est la loi de Y dans l'espace probabilisé $(\Omega, P_{(X=x)})$. Elle est donc déterminée pour tout $y \in Y$ par :

$$P_{(X=x)}(Y = y) = P(Y = y|X = x) = \frac{P(Y = y, X = x)}{P(X = x)}.$$

Théorème 5.9 (Loi conjointe par loi marginale et lois conditionnelles)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur Ω .

1.
$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y).$$

2.
$$P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y).$$

On a de plus :

3.
$$P(X = x, Y = y) = \begin{cases} P(Y = y)P(X = x|Y = y) & \text{si } P(Y = y) \neq 0 \\ P(X = x)P(Y = y|X = x) & \text{si } P(X = x) \neq 0 \end{cases}$$

Et enfin :

4.
$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(Y = y)P(X = x|Y = y) \text{ si pour tout } y \in Y(\Omega), P(Y = y) \neq 0.$$

5.
$$P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)P(Y = y|X = x) \text{ si pour tout } x \in X(\Omega), P(X = x) \neq 0.$$

6 Variables aléatoires indépendantes

Définition 6.1 (Couple de variables aléatoires indépendantes)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur (Ω, P) . Elles sont indépendantes pour la probabilité P si pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants pour la probabilité P , *i.e.* si

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(X(\Omega)) \times \mathcal{P}(Y(\Omega)), P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B).$$

Proposition 6.2

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur (Ω, P) . Elles sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants, *i.e.*

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

Proposition 6.3

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur (Ω, P) . Elles sont indépendantes si et seulement si au moins une des deux conditions suivantes est vérifiée :

1. $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P(Y = y) \neq 0 \implies P(X = x|Y = y) = P(X = x).$
2. $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P(X = x) \neq 0 \implies P(Y = y|X = x) = P(Y = y).$

Proposition 6.4 (Images de variables indépendantes)

Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes sur (Ω, P) . Soit f une fonction définie sur $X(\Omega)$ et g une fonction définie sur $Y(\Omega)$. Alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes pour la probabilité P .

Proposition 6.5 (Espérance d'un produit de variables indépendantes)

Soient X et Y des variables aléatoires réelles indépendantes sur (Ω, P) . Alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

7 Covariance

7.1 Définition

Définition 7.1 (Covariance de deux variables aléatoires réelles)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé (Ω, P) . La covariance de X et Y est le réel

$$\text{Cov}(X, Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right).$$

Proposition 7.2

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé (Ω, P) . Alors

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

7.2 Propriétés de la covariance

Proposition 7.3 (Bilinéarité)

La covariance est une forme bilinéaire symétrique positive sur l'espace des variables aléatoires réelles sur Ω .

Proposition 7.4 (Cas de variables indépendantes)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un même espace probabilisé (Ω, P) . Alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

7.3 Variance d'une somme

Théorème 7.5 (Variance d'une somme de deux variables)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé (Ω, P) . Alors

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y).$$

Théorème 7.6 (Variance d'une somme de deux variables indépendantes)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un même espace probabilisé (Ω, P) . Alors

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

8 Extension aux n -uplets de variables aléatoires

8.1 Définitions

Définition 8.1 (n -uplet de variables aléatoires)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires sur Ω à valeurs respectivement dans E_1, \dots, E_n . Le n -uplet de variables aléatoires (X_1, \dots, X_n) est la variable aléatoire

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow E_1 \times \dots \times E_n \\ \omega &\longmapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)). \end{aligned}$$

Si $E_k = \mathbb{R}$ pour tout k , (X_1, \dots, X_n) est un n -uplet de variables aléatoires réelles.

Proposition 8.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires sur Ω . La famille

$$\left((X_1 = x_1) \cap \dots \cap (X_n = x_n) \right)_{(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)}$$

forme un système complet d'événements de Ω .

Définition 8.3 (Loi conjointe, lois marginales)

Soit (X_1, \dots, X_n) un n -uplet de variables aléatoires sur l'espace probabilisé (Ω, P) . La loi conjointe de X_1, \dots, X_n est la probabilité sur $X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$ définie par

$$\begin{aligned} X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega) &\longrightarrow [0, 1] \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n). \end{aligned}$$

Les lois marginales sont les lois de X_1, \dots, X_n .

Théorème 8.4 (Lois marginales)

Soit (X_1, \dots, X_n) un n -uplet de variables aléatoires sur l'espace probabilisé (Ω, P) . Pour $i \in [1, n]$, notons $n_i = \text{card}(X_i(\Omega))$, et $X_i(\Omega) = \{x_{i1}, \dots, x_{in_i}\}$. On a alors pour tout $j \in [1, n_i]$,

$$P(X_i = x_{ij}) = \sum_{\substack{1 \leq j_k \leq n_k \\ k=1, \dots, n, k \neq i}} P(X_1 = x_{1j_1}, \dots, X_{i-1} = x_{i-1, j_{i-1}}, X_i = x_{ij}, X_{i+1} = x_{i+1, j_{i+1}}, \dots, X_n = x_{nj_n}).$$

8.2 Indépendance de n variables aléatoires

Définition 8.5 (Indépendance mutuelle de variables aléatoires)

Des variables aléatoires X_1, \dots, X_n sur (Ω, P) sont mutuellement indépendantes si pour tout $A_i \subset X_i(\Omega)$ ($i = 1, \dots, n$), les événements $(X_1 \in A_1), \dots, (X_n \in A_n)$ sont indépendants, *i.e.* si

$$\forall A_1 \times \dots \times A_n \in \mathcal{P}(X_1(\Omega)) \times \dots \times \mathcal{P}(X_n(\Omega)), P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in A_i).$$

Proposition 8.6

Des variables aléatoires X_1, \dots, X_n sur (Ω, P) sont mutuellement indépendantes si, et seulement si, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$, les événements $(X_1 = x_1), \dots, (X_n = x_n)$ sont indépendants, *i.e.* si, et seulement si,

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i).$$

Théorème 8.7 (Variance d'une somme)

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires réelles sur (Ω, P) . Alors

$$V(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j).$$

Théorème 8.8 (Variance d'une somme de variables deux à deux indépendantes)

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires réelles deux à deux indépendantes sur (Ω, P) . Alors

$$V(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i).$$

Proposition 8.9 (Sommes de variables de Bernoulli indépendantes)

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires réelles de Bernoulli, de paramètre p , deux à deux indépendantes sur (Ω, P) . Alors

$$V(X_1 + \dots + X_n) = np(1 - p).$$