

TD n° 31.
Espaces préhilbertiens réels.

Applications directes du cours

Exercice 1 Soit $x = (1, -2, 1) \in \mathbb{R}^3$. Donnez une base orthonormée de $\text{vect}(x)$ et de $(\text{vect}(x))^\perp$ pour le produit scalaire usuel.

Exercice 2 Soient $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 2, 3, 0)$ et $u_3 = (0, 1, 4, 1)$ des éléments de \mathbb{R}^4 . Montrez que (u_1, u_2, u_3) forme une famille libre et donnez une base orthonormée de $\text{vect}(u_1, u_2, u_3)$.

Exercices classiques

Exercice 3 Déterminez l'expression de la projection orthogonale sur $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2y - z = y - z + t = 0\}$. De même, déterminez l'expression de la symétrie orthogonale par rapport à F .

Exercice 4 Soient

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_A : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\longmapsto (x_1 \ y_1) A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Montrez que φ_A est un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 . Orthonormalisez la base canonique pour ce produit scalaire.

Exercice 5 Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Montrez que

$$N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt}$$

est une norme sur E .

Exercice 6 Soient $E = \mathcal{C}([0, 2\pi])$ et

$$(f|g) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} fg$$

pour $f, g \in E$. Montrez que $(\cdot | \cdot)$ défini un produit scalaire sur E et que

$$\{x \mapsto \cos(nx), x \mapsto \sin(mx)\}_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$$

est une famille orthogonale. Déterminez les composantes dans cette base de $f \in E$ (dans le cas où f est une combinaison linéaire finie de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$).

Exercice 7 Soit E un espace euclidien et $\|\cdot\|$ sa norme euclidienne. Montrez que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 \leq n \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2.$$

Exercice 8 Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Montrez que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$.

Exercice 9 Montrez que

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}, \quad \forall n \geq 2, \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2} \geq \frac{2}{n(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k} \right)^2$$

Exercice 10 Soit

$$E = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]), \forall x \in [0, 1], f(x) \neq 0\}.$$

Pour $f \in E$, on pose

$$P(f) = \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \left(\int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \right).$$

1. Montrez que

$$\min_{f \in E} P(f) = 1.$$

Déterminez l'ensemble des fonctions $f \in E$ pour lesquelles $P(f) = 1$.

2. Montrez que

$$\sup_{f \in E} P(f) = +\infty.$$

Exercice 11 Soit E un espace euclidien et f une application de E dans E préservant le produit scalaire. Montrez que f est une application linéaire.

(indication : considérez $\|f(\lambda x + \mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y)\|$)

Exercice 12 Soient E un espace euclidien et p un projecteur de E . Montrez que p est un projecteur orthogonal si et seulement si

$$\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

Exercice 13 Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale de E , et $u = e_1 + e_2$, $v = 2e_1$ et $w = e_2 + 3e_3$. Montrez que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de E . Donnez la matrice dans la base \mathcal{B}' de la projection orthogonale sur le plan d'équation dans la base \mathcal{B} $x + y + z = 0$.

Exercice 14 Soient

$$A = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix},$$

\mathcal{B} une base orthonormée de \mathbb{R}^3 (pour le produit scalaire usuel), et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. Montrez que f est un projecteur. Est-il orthogonal?

Exercice 15 On définit sur $\mathbb{R}_2[X]$

$$S(P, Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)dx.$$

1. Montrez que S est un produit scalaire.
2. Trouvez une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
3. Calculez

$$\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx.$$

Exercice 16 On se place dans \mathbb{R}^4 muni du produit scalaire usuel. Soient \mathcal{B} une base orthonormée de \mathbb{R}^4 et F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 défini dans la base \mathcal{B} par le système d'équations

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Déterminez la matrice dans la base \mathcal{B} de la projection orthogonale sur F .

Refaire l'exercice dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \sum_{i=-1}^2 P(i)Q(i)$, avec $B = (1, X, X^2, X^3)$.

Exercice 17 Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$ des vecteurs unitaires tels que

$$\forall x \in E, \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2 = \|x\|^2.$$

Montrez que (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormale de E .

Exercice 18 Soit E un espace préhilbertien réel, et F, G des sous-espaces vectoriels de E .

1. Montrez que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
2. Montrez que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.
3. Dans le cas où E est euclidien, montrez que $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

Exercices*

Exercice 19 Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt.$$

Soit $V = \{f \in E, f(0) = -1, f(1) = 1\}$, et pour $f \in E$,

$$I(f) = \int_0^1 f'^2(t)dt + 2 \int_0^1 e^t f(t)dt.$$

Montrez qu'il existe $f_0 \in V$ tel que $I(f_0) = \inf_{f \in V} I(f)$.

Exercice 20 Soit E un espace vectoriel euclidien. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on note

$$G(x_1, \dots, x_n) = \left((x_i | x_j) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \gamma(x_1, \dots, x_n) = \det \left(G(x_1, \dots, x_n) \right).$$

1. Montrez que

$$\text{rang} \left(G(x_1, \dots, x_n) \right) = \text{rang} \left(x_1, \dots, x_n \right).$$

2. Montrez que

$$\gamma(x_1, \dots, x_n) \geq 0$$

et que la famille (x_1, \dots, x_n) est liée si et seulement si $\gamma(x_1, \dots, x_n) = 0$.

3. On suppose dans cette question que la famille est libre. Notons F le sous-espace vectoriel de E qu'elle engendre. Montrez que pour tout $x \in E$, on a

$$d^2(x, F) = \frac{\gamma(x, x_1, \dots, x_n)}{\gamma(x_1, \dots, x_n)}.$$