TD n° 32.

Séries numériques et familles sommables.

Applications directes du cours

Exercice 1 Déterminez la nature de la série de terme général

1. $\dfrac{n}{n^2+1}$
2. $\dfrac{\ln(n)}{n}$
3. $\dfrac{\ln(n)}{n^2}$
4. $\dfrac{(-1)^n \ln^9(n)}{n^3}$
5. $\dfrac{1}{\mathrm{ch}(n)}$
6. $\dfrac{1}{\mathrm{th}(n)}$
7. $\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$
8. $\dfrac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)}$
9. $\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$
10. $e^{-\sqrt{n}}$
11. $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
12. $\sqrt{e}^{-\sqrt{n}+\sin(n)}$
13. $n^{2013}e^{-\sqrt{n}}$

Exercice 2 Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs convergentes. Montrez que les séries suivantes le sont aussi.

$$\sum \min(u_n, v_n) \qquad \sum \max(u_n, v_n) \qquad \sum \sqrt{u_n v_n} \qquad \sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$$

Exercices classiques

Exercice 3 Montrez qu'une famille sommable est à support dénombrable.

Exercice 4 Établir la convergence et déterminez la somme des séries dont le terme général est :

1. $\dfrac{1}{n(n+1)}$.
2. $\dfrac{n^2 2^n}{n!}$.
3. $\arctan\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}\right)$.
4. $\ln\left(\dfrac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right)$.
5. $\dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)}$.
6. $\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 5 Soit $(u_n)_n$ une suite de termes positifs. On pose $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$. Montrez que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 6 Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_{n,p} = \frac{1}{n^2-p^2}$ si $n \neq p$, et 0 sinon. Montrez que la famille $(a_{n,p})$ n'est pas sommable.

Exercice 7 Calculez $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Exercice 8 (Séries de Bertrand) Montrez que la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

Exercice 9 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$.

1. Montrez que la série $\sum u_n$ converge.
2. La série $\sum v_n$ est-elle convergente ?
3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 10 Soit $\sum(-1)^n u_n$ une série spéciale alternée (donc (u_n) décroissante de limite nulle). Montrez que le reste d'ordre n vérifie $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

Exercice 11 (Critère de d'Alembert) Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}_+$. Montrez que :

1. Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.
2. Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge.
3. Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

Exercice 12 Déterminez la nature de la série de terme général

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right), \qquad \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

Exercice 13 (Série harmonique alternée)

1. Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente mais pas absolument convergente.
2. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Calculez $\displaystyle\int_0^1 x^p \mathrm{d}x$ ($p \in \mathbb{N}$), et en déduire que $S_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} - \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\mathrm{d}x$.
3. Montrez que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

$\boxed{\text{Exercices classiques*}}$

Exercice 14 Soit $r \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrez que la famille $(r^{|n|}e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et calculez sa somme.

Exercice 15 Prouvez la convergence et déterminez la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 16 Prouvez la convergence et déterminez la somme des séries $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+1}{n!}$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2-2}{n!}$.

Exercice 17 Soit $a > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a}$, et si $a > 1$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^a}$.

1. Déterminez un équivalent de S_n quand $0 < a < 1$.
2. Déterminez un équivalent de R_n quand $1 < a$.

Exercice 18 Pour $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > 0$, on pose $a_{p,q} = \frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}$.

1. Montrez que pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{(a+b)^2} \leqslant \frac{1}{a^2+b^2} \leqslant \frac{2}{(a+b)^2}$.
2. Pour quelles valeurs de α la famille $(a_{p,q})$ est-elle sommable ?

Exercice 19 Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} 2^k u_k$.

1. Montrez que la série $\sum v_n$ est absolument convergente et déterminez sa somme en fonction de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
2. Montrez que la série de terme général $w_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{6^k}{k!}$ converge et calculez sa somme.

Exercice 20 Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

1. Montrez que la famille $(z^{pq})_{p,q\in\mathbb{N}^*}$ est sommable.
2. En déduire que $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^p}{1-z^p} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{d}(n) z^n$, où $\mathrm{d}(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.

Exercice 21 Étudiez la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$, et en remarquant que $\int_0^1 x^p \mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}$, calculez sa somme.

Exercices*

Exercice 22 Déterminez la nature de la série de terme général : $u_n = (\pi/2)^\alpha - (\arctan(n))^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$.

Exercice 23 Déterminez la nature de la série de terme général : $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

Exercice 24 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminez la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} (\ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2))$, et calculez la somme en cas de convergence.