TD n° 33.

Systèmes.

Exercice 1 Résoudre les systèmes suivants, et donnez le rang du système en fonction des paramètres (dans $\mathbb{C}$, sauf mention du contraire).

1. $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \\ x+ay+az=a \\ ax+y+az=1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+ay+bz=a \\ x+by+az=b \\ ax+y+bz=a \\ bx+y+az=b \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-my+m^2z=2m \\ mx-m^2y+mz=2m \\ mx+y-m^2z=1-m \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=2 \\ a^2x+b^2y+c^2z=3 \end{cases}$ où a, b et c sont les zéros de $t^3-t+1=0$ dans $\mathbb{C}$.

5. $\begin{cases} ax+by+az+bt=a \\ bx+cy+bz+ct=b \\ cx+dy+cz+dt=c \\ dx+ay+dz+at=d \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+2y+az=2(3a+2) \\ 2x+ay+z=b \\ ax+y+2z=b \\ x+y+z=2(a+3) \end{cases}$

Exercice 2 Résoudre les systèmes suivants, d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, de paramètres $m,a,b\in\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x+my+(m-1)z=m+1 \\ 3x+2y+mz=3 \\ (m-1)x+my+(m+1)z=m-1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{cases}$$

Exercice 3 Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathbb{R}^n$ de direction respective F et G, et $A\in\mathcal{F}$, $B\in\mathcal{G}$. Montrez que

$$\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\neq\emptyset \iff \overrightarrow{AB}\in F+G.$$

Exercice 4 Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n, et $\mathcal{B}$ une base de E. Montrez que la famille des formes coordonnées de $\mathcal{B}$ forme une base de E^*.

Exercice 5 Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n. Montrez qu'une famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ est une base de E^* si et seulement si $\bigcap_{k=1}^{n}\mathrm{Ker}(\varphi_k)=\{0\}$.

Exercice 6 Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n. Montrez qu'une famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ est une base de E^* si et seulement si $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & K^n \\ x & \longmapsto & (\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x)) \end{array}$ est un isomorphisme.

Exercice 7 Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrez qu'il existe un unique $(n+1)$-uplet $(a_0,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\forall\, P\in\mathbb{R}_n[X],\ \int_0^\pi P(t)\sin(t)\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n}a_kP(k^2).$$

Déterminez-le dans le cas où $n=2$.

Exercice 8 Sur $E=\mathbb{R}_n[X]$, on définit les $n+1$ formes linéaires φ_k, $k=0,\dots,n$, par $\varphi_k(P)=P^k(0)$. Montrez que la famille $(\varphi_0,\dots,\varphi_n)$ est une base de E^*.