

TD n° 34.

Variables aléatoires.

Variables aléatoires

Exercice 1 Un dé à 6 faces équilibré a une face marquée 1, deux marquées 2, deux marquées 3 et une marquée 4. Soit X la variable aléatoire donnant la face obtenue lors d'un lancer.

1. Déterminez la loi de X .
2. Calculez $E(X)$ et $V(X)$.
3. Calculez $E(\frac{1}{X})$ et $E(\ln(X))$.

Exercice 2 Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules noires. Un joueur tire simultanément 3 boules au hasard. Il gagne 1 euro par boule blanche obtenue, et perd 2 euros par boule noire tirée. On note X son "gain" ($X < 0$ s'il perd de l'argent). Déterminez la loi de X et son espérance.

Exercice 3 Un joueur de flechettes vise une cible de 10 cm de rayon qui comporte dix couronnes concentriques délimitées par des cercles de rayons $1, 2, \dots, 10$ cm, numérotées de 1 à 10 (donc 1 pour celle au centre). Les couronnes rapportent des points de allant de 1 à 10, 10 étant pour la couronne au centre de la cible (donc un disque de rayon 1 cm). On suppose que le joueur ne rate jamais la cible et que la probabilité qu'il atteigne une couronne est proportionnelle à l'aire de celle ci.

1. On modélise par X le nombre de point obtenus. Déterminez la loi de X et son espérance.
2. On suppose que le le joueur doit payer a euros pour lancer une fléchette. Si le joueur atteint une couronne numeroté k , avec $k \leq 5$, il gagne $11 - k$ euros. Pour quelles valeurs de a ce jeu est-il favorable au propriétaire ?

Exercice 4 Une urne contient des boules numérotées de 1 à n . On effectue des tirages sans remise tant que les numéros obtenus forment une suite strictement croissante. On note X le nombre de tirages effectués.

1. Déterminez la loi de X .
2. Montrez que $E(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k)$. Déterminez $E(X)$.

Exercice 5 Pour patienter, une personne se déplace à chaque seconde d'un pas vers le nord ou vers le sud, avec un eprobabilité $p \in]0, 1[$ d'aller vers le nord.

1. Quelle est la probabilité qu'elle se retrouve au point de départ au bout d'une minute ?
2. On oriente l'axe vers le nord, l'unité étant le pas. Soit X_n l'abscisse au bout de n pas (secondes). Déterminez l'espérance de X_n .

Exercice 6 Un chapeau magique contient $n - 1$ lapins blancs et un lapin noir. On procède à l'extraction sans remise des lapins, jusqu'à ce qu'il n'en ait plus dans le chapeau. Soit X le rang de l'extraction du lapin noir. Déterminez la loi de X , son espérance et calculez sa variance.

Exercice 7 Un étudiant a écrit un programme informatique qui devrait simuler une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Tout fonctionne bien dans le cas $X(\omega) \neq 0$, cependant, un bug dans le programme fait que lorsque le programme devrait rendre 0, il rend en fait un nombre au hasard entre 1 et n .

1. Déterminez la loi de la variable aléatoire Y égale à ce que le programme répond.
2. Calculez $E(Y)$.

Exercice 8 Un enfant part en voyage scolaire. Il promet de téléphoner à ses parents tous les jours. Il téléphone le premier jour. Mais, s'il téléphone un jour donné, il oublie une fois sur deux le lendemain. En revanche, s'il oublie un jour donné, il n'oublie qu'une fois sur quatre le lendemain. En un mois, combien de fois aura-t'il téléphoné en moyenne ?

Exercice 9 On lance 1000 fois une pièce équilibrée et on note X le nombre de piles obtenus. Donner un majorant de la probabilité pour que $|X - 500|$ soit supérieur ou égal à 50.

Exercice 10 (Quiz loi) Donner la loi de X dans chacun des cas suivants, sans refaire les calculs. Préciser l'univers image et les paramètres.

1. On suppose que la proba de naissance d'une fille et d'un garçon sont identiques. X est le nombre de garçons dans une famille de 3 enfants.
2. Dans un champs paissent 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de ce champs. X est le nombre de bosses.
3. On range 20 cravates dans 3 tiroirs, au hasard. X est le nombre de cravates dans le premier tiroir.
4. Un jeu de tarot est mélangé et posé faces cachées. On retourne une par une les cartes jusqu'à trouver l'Excuse. X est le nombre de cartes retournées au total.
5. Aux dernières élections, une proportion p d'individus s'est abstenue. On interroge une personne au hasard dans la rue. X vaut 0 si la personne n'a pas voté, 1 si elle est a voté.

Même situation, mais on interroge 100 personnes. X est le nombre de votants.

Exercice 11 (Loi hyper-géométrique) Un chapeau contient 8 lapins noirs, 5 blancs et 6 roses. On extrait sans remise 10 lapins. On note X est le nombre de lapins roses. Déterminez la loi de X .

Exercice 12 Une ville contient une proportion p d'individus atteint par un virus contagieux. Si une personne saine est en contact avec une personne contaminée, elle a une probabilité de $2/3$ d'être contaminée.

Un voyageur de commerce (sain) rend visite à n habitants de cette ville.

1. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de malades rencontrés par le voyageur. Déterminez la loi de N .
2. Quelle est la probabilité qu'il soit contaminé à la fin de ses visites ?

Couples de variables aléatoires

Exercice 13 Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p \in]0, 1[$, sur le même espace probabilisé. Soit $U = X + Y$ et $V = X - Y$.

1. Déterminez la loi conjointe de U et V , ainsi que leur covariance.
2. Sont-elles indépendantes ?

Exercice 14 Quatre cartes numérotées de 1 à 4 sont posées faces cachées sur une table. On retourne deux cartes au hasard (sans remise) et on note X le plus petit numéro tiré et Y le plus grand.

1. Déterminez la loi conjointe du couple (X, Y) ainsi que les lois marginales.
2. En déduire la loi de $X + Y$.

Exercice 15 On lance un dé à 6 faces équilibré, et on note X le nombre obtenu. On choisit ensuite au hasard un nombre entier entre 1 et X , que l'on note Y .

1. Soit $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$. Quelle est la loi conditionnelle de Y sachant $X = i$?
2. Déterminez la loi conjointe du couple (X, Y) et en déduire la loi de Y .
3. Déterminez la loi de X sachant que $Y = 2$.

Exercice 16 On lance trois pièces équilibrées et on note X le nombre de piles obtenus. Soit Y la variable aléatoire qui vaut 1 si on a obtenu plus de faces que de piles, 0 sinon.

1. Donnez la loi du couple (X, Y)
2. Calculez leur covariance, et leurs écart-types.

Exercice 17 Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{U}(\llbracket 0, 3 \rrbracket)$ et soit $Y = (X - 1)^2$.

1. Déterminez la loi conjointe de X et Y .
2. Calculez la covariance de X et Y ainsi que le coefficient de corrélation linéaire.

Exercice 18 Un secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n personnes distinctes ($n \geq 2$). Pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant est $p \in]0, 1[$, indépendamment de ce qui se passe pour les autres. On note X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Déterminez la loi de X , son espérance, et sa variance.
2. Après ces n appels, le secrétaire tente une deuxième fois, dans les mêmes conditions, de contacter les $n - k$ correspondants injoignables la première fois. Soit Y le nombre d'appels aboutis lors de cette deuxième tentative, et $Z = X + Y$.
 - (a) Déterminez la loi de Y sachant $(X = k)$, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En déduire la loi conjointe de X et Y .
 - (b) Montrez que Z suit une loi binomiale que l'on précisera.

Exercice 19 Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1, 0, 1\})$ et $Y = X^2$.

1. Déterminez la loi du couple (X, Y) ainsi que les lois marginales.
2. Calculez la covariance de X et de Y . X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 20 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Soient T une v.a. qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(2n, \frac{1}{2})$ et Y une v.a. à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que $\mathbb{P}(Y = 1) = p$. On suppose que T et Y sont indépendantes et on pose $X = T - n$ et $Z = XY$.

1. Les v.a. X et T sont-elles indépendantes ? Et X et Y ?

2. Déterminez $Z(\Omega)$ et exprimez la loi de Z en fonction de celles de X et de Y .
3. En déduire que X et Z ont même loi.
4. X et Z sont-elles indépendantes ?
5. Calculez l'espérance de Z .

Exercice 21 Une urne contient $n \in \mathbb{N}^*$ boules numérotées de 1 à n . On retire l'une après l'autre toutes les boules de cette urne.

1. Quelle est la probabilité pour que les boules 1, 2 et 3 sortent consécutivement et dans cet ordre ?
2. Calculez la probabilité pour que les boules 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre (consécutivement ou non).
3. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir les boules 1, 2 et 3. Déterminez la loi de X_n ainsi que son espérance.

Exercice 22 Une puce se déplace sur un axe gradué d'origine O par bonds successifs d'une ou de deux unités suivant la procédure suivante :

- Au départ, la puce est en O .
- Si, à un instant, la puce est à l'abscisse k , à l'instant d'après, elle est à l'abscisse $k+1$ ou $k+2$, chacun avec une probabilité de $\frac{1}{2}$.
- Les sauts sont indépendants.

1. Soit S_n le nombre de sauts de deux unités effectués au cours des n premiers sauts. Déterminez la loi, l'espérance et la variance de S_n .
2. Soit X_n l'abscisse de la puce après n sauts. Exprimez X_n en fonction de S_n . En déduire la loi, l'espérance et la variance de X_n .
3. On note Y_n le nombre de sauts nécessaire pour atteindre ou dépasser l'abscisse n .
 - (a) Déterminez $Y_n(\Omega)$.
 - (b) Montrez que, pour tout entier $n \geq 2$ et tout entier $k \geq 1$,

$$P(Y_n = k) = \frac{1}{2}P(Y_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2}P(Y_{n-2} = k-1).$$

- (c) Montrez que pour tout entier $n \geq 2$,

$$E(Y_n) = \frac{1}{2}E(Y_{n-1}) + \frac{1}{2}E(Y_{n-2}) + 1.$$

- (d) Déterminez un réel a tel que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = E(Y_n) - na$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. Calculez alors u_n , puis $E(Y_n)$ en fonction de n .

Exercice 23 Soit un jeu de $2n$ cartes ($n = 17$ ou 27) qui contient deux jokers. On joue au jeu suivant :

- On retourne les cartes une à une jusqu'à obtenir le premier joker
- Après le premier joker, à chaque fois que l'on retourne une carte, le joueur paie un euro.
- dès que le deuxième joker est retourné, le joueur gagne a euros et arrête de jouer.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de cartes retournées pour obtenir le premier joker, et Y pour le deuxième.

1. Montrez que si $1 \leq i < j \leq 2n$, $\mathbb{P}(X = i \cap Y = j) = \frac{1}{n(2n-1)}$.
2. Donner la loi du couple (X, Y) , puis les lois de X , Y et $Y - X$.
3. Calculez $E(X)$.
4. Déterminer la valeur de a pour laquelle la partie est équilibrée.

Exercice 24 Pour l'écrit d'un concours, on répartit n candidats dans trois salles S_1, S_2 et S_3 . On suppose que chaque salle pourrait accueillir les n candidats, que pour chaque candidat, les trois salles sont équiprobables et que le choix est indépendant de l'ordre des candidats. On note X_i le nombre de candidats dans la salle S_i .

1. Déterminez la loi de chacun des X_i .
2. Calculez la loi puis la variance de $X_1 + X_2$.
3. En déduire $\text{cov}(X_1, X_2)$.
4. En déduire enfin $\text{cov}(X_1, X_3)$ et $\text{cov}(X_2, X_3)$.

Exercice 25 Soit (X_n) une suite de variables de Bernoulli de même paramètre p , indépendantes. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $T_n = \sum_{i=1}^n Y_i$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donnez la loi de Y_n , son espérance et sa variance.
2. Déterminez la loi du conjointe du couple (Y_n, Y_{n+1}) et calculez $\text{cov}(Y_n, Y_{n+1})$.
3. Déterminez pour tout n et pour tout $k \geq 2$ la loi conjointe de (Y_n, Y_{n+k}) . Les variables Y_n et Y_{n+k} sont-elles indépendantes ?
4. Calculez $E(T_n)$ et $V(T_n)$.

Exercice 26 Soit n urnes numérotées U_1, U_2, \dots, U_n . L'urne U_i contient une boule blanche et i boules noires. On tire au hasard une boule dans chaque urne et on note S la variable aléatoire qui donne le nombre de boules blanches tirées. Calculez $E(S)$.

Exercice 27 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, prenant un nombre fini de valeurs, de même espérance m et de même écart type σ .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$.

1. Déterminez $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(T_n)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma(T_n)$. Quelle interprétation peut-on donner de ces limites ?
2. Montrez que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|T_n - m| \geq \varepsilon) = 0$.

Exercice 28 (Inégalité de Bernstein) Soit $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, $x > 0$ et $q = 1 - p$.

1. Soit $\lambda > 0$. Montrez que $P(S_n - np \geq nx) \leq \frac{E(e^{\lambda(S_n - np)})}{e^{n\lambda x}}$.
2. Montrez que $E(e^{\lambda(S_n - np)}) = (pe^{\lambda q} + qe^{-\lambda p})^n$.
3. Montrez que, pour tout réel t , $e^t \leq e^{t^2} + t$. En déduire que

$$P(S_n - np \geq nx) \leq e^{n(\lambda^2 - \lambda x)},$$

puis que

$$P(S_n - np \geq nx) \leq e^{-nx^2/4}.$$

4. Comment démontrerait-on de la même façon que

$$P(S_n - np \leq -nx) \leq e^{-nx^2/4}.$$

En déduire l'inégalité de Bernstein :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq x\right) \leq 2e^{-\frac{nx^2}{4}}.$$