$\boxed{\text{TD 32 p1}}$ $\boxed{\text{Ex 1}}$ (i) (x) est une base de $\mathrm{vect}(x)$ donc $\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ est une bon de $\mathrm{vect}(x)$. Or, $\|x\| = \sqrt{1^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{6}$, donc

$$\boxed{\left(\frac{(1,-2,1)}{\sqrt{6}}\right) \text{ est une bon de } \mathrm{vect}(x)}$$

(ii) Déterminons $\mathrm{vect}(x)^\perp$: Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$(a,b,c) \in x^\perp \iff \langle (a,b,c), x\rangle = 0 \iff a-2b+c=0$$

$$\iff c=-a+2b \iff (a,b,c) = (a,b,-a+2b)$$

$$= a(1,0,-1)+b(0,1,2)$$

et $\boxed{x^\perp = \mathrm{vect}((1,0,-1),(0,1,2))}$

On applique le procédé de Schmidt à $e_1=(1,0,-1)$ et $e_2=(0,1,2)$.

On pose $u_1 = e_1/\|e_1\| = \frac{e_1}{\sqrt{2}}$.

Puis $u'_2 = e_2 - a u_1$ où $a \in \mathbb{R}$ est tq $\langle u'_2, u_1\rangle = 0$.

Or, $\langle u'_2, u_1\rangle = \langle e_2, u_1\rangle - a\|u_1\|^2 = \langle e_2, u_1\rangle - a$

donc $a = \langle e_2, u_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle e_2, e_1\rangle = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

Notez que je ne remplace e1 et e2 par leur valeur qu'au tout dernier moment

et $u'_2 = e_2 + \sqrt{2}u_1 = e_2+e_1 = (1,1,1)$

et $u_2 = \frac{u'_2}{\|u'_2\|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$

et $\boxed{\left(\frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}}, \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}\right) \text{ est une bon de } x^\perp.}$

$\boxed{\text{Ex 2}}$ On applique le procédé de Schmidt à (u_1,u_2,u_3). S'il n'aboutit pas, cela prouvera que la famille est liée. Sinon, qu'elle est libre, et on obtiendra une bon de $\mathrm{vect}(u_1,u_2,u_3)$. (⚠ notations inversées / cours !!)

On pose $\boxed{e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(1,1,0,0)}{\sqrt{2}}}$

Soit $e'_2 = u_2 - a e_1$ où $a \in \mathbb{R}$ est tq $\langle e'_2, e_1\rangle = 0$.

Mais $\langle e'_2, e_1\rangle = \langle u_2 - a e_1, e_1\rangle = \langle u_2, e_1\rangle - a\langle e_1, e_1\rangle$

$= \langle u_2, e_1\rangle - a$

(À nouveau, on ne remplace pas par les valeurs numériques)

donc $a = \langle u_2, e_1\rangle = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

et $e'_2 = u_2 - \sqrt{2}\, e_1 = u_2 - u_1 = (-1, 1, 3, 0)$.

et $\boxed{e_2 = \frac{e'_2}{\|e'_2\|} = \frac{1}{\sqrt{11}}(-1, 1, 3, 0)}$

Soit $e'_3 = u_3 - b e_1 - c e_2$ où $b, c \in \mathbb{R}$ sont tq

$\langle e'_3, e_1\rangle = \langle e'_3, e_2\rangle = 0$

Or, $\langle e'_3, e_1\rangle = \langle u_3, e_1\rangle - b\underbrace{\langle e_1, e_1\rangle}_{=\|e_1\|^2 = 1!} - c\underbrace{\langle e_2, e_1\rangle}_{=0 !!!}$

$= \langle u_3, e_1\rangle - b$

donc $b = \langle u_3, e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$

et de m, $c = \langle u_3, e_2\rangle = \frac{13}{\sqrt{11}}$

et $e'_3 = u_3 - \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 - \frac{13}{\sqrt{11}} e_2$

$= u_3 - \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0) - \frac{13}{11}(-1, 1, 3, 0) = \frac{1}{22}(15, -15, 10, 22)$

et $e_3 = e'_3 / \|e'_3\| = \ldots\ldots$

et (e_1, e_2, e_3) est une bon de vect (u_1, u_2, u_3)

TD 32 p3 | Ex 3 | Base de F : Soit $u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$.

Alors $u\in F \iff \begin{cases} x+2y-z=0 \\ y-z+t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-2y+z \\ t=-y+z \end{cases}$

$\iff u=(-2y+z, y, z, -y+z) = y(-2,1,0,-1)+z(1,0,1,1)$

et $\boxed{F=\mathrm{vect}((\underbrace{-2,1,0,-1}_{e_1}), (\underbrace{1,0,1,1}_{e_2}))}$ (les vecteurs sont lin. ind car... donc forment une base)

Puis : Soit p la projection orthogonale sur F.

Soit $p(u)=(x',y',z',t')$. Alors $p(u)$ est caractérisé par :

$\begin{cases} p(u)\in F \\ u-p(u)\in F^\perp \end{cases}$

Il existe donc $a,b\in\mathbb{R}$ tq $p(u)=ae_1+be_2$

Puis : $u-p(u)\in F^\perp \iff \langle u-p(u), e_1\rangle = \langle u-p(u), e_2\rangle = 0$

$\iff \begin{cases} \langle p(u), e_1\rangle = \langle u, e_1\rangle \\ \langle p(u), e_2\rangle = \langle u, e_2\rangle \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a\|e_1\|^2 + b\langle e_2, e_1\rangle = \langle u, e_1\rangle \\ a\langle e_1, e_2\rangle + b\|e_2\|^2 = \langle u, e_2\rangle \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 6a-3b = -2x+y-t \\ -3a+3b = x+z+t \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 3a = -x+y+z \\ 3b = y+2z+t \end{cases}$

et $p(u) = \frac{1}{3}(-x+y+z)(-2,1,0,-1) + \frac{1}{3}(y+2z+t)(1,0,1,1)$

donc l'expression analytique de p est :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x - y + t) \\ y' = \frac{1}{3}(-x + y + z) \\ z' = \frac{1}{3}(y + 2z + t) \\ t' = \frac{1}{3}(x + z + t) \end{cases}$$

On obtient la symétrie pour $s = 2p - id$,

ie $s(u) = 2p(u) - u$.

Ex4 Soit $u = (x, y)$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $u'' = (x'', y'')$

$u' = (x', y')$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $X'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$

On a : $\varphi_A(u, u') = {}^tXAX'$

Ppté <u>On a donc</u> $\varphi_A(u', u) = {}^tX'AX \in \mathbb{R}$

donc ${}^t({}^tX'AX) = {}^t({}^tX'AX) = {}^tX{}^tAX'$

$= {}^tXAX'$ } Asymétrique

donc $\boxed{\varphi_A(u, u') = \varphi_A(u', u)}$: φ_A est symétrique.

<u>Bilinéaire</u> $\varphi_A(\lambda u + u', u'') = {}^t(\lambda X + X')AX''$

$= (\lambda {}^tX + {}^tX')AX''$

$= \lambda {}^tXAX'' + {}^tX'AX''$

$= \lambda \varphi_A(u, u'') + \varphi_A(u', u'')$

donc φ_A est linéaire à gauche. Par symétrie, $\boxed{\varphi_A \text{ est bilinéaire}}$

TD 3 2 p5 Puis $\varphi_A(u,u) = {}^t x A x = {}^t x \begin{pmatrix} 5x+2y \\ 2x+4y \end{pmatrix} = x(5x+2y)+y(2x+4y)$

$$= 5x^2 + 4xy + 4y^2$$
$$= 4x^2 + (x+2y)^2 \geq 0$$

et si $\varphi_A(u,u) = 0$, alors $4x^2 + (x+2y)^2 = 0$

donc $4x^2 = (x+2y)^2 = 0$

donc $x = y = 0$ et $u = (0,0)$

et $\boxed{\varphi_A \text{ est déf. positive}}$

Orthonormalisation de $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$.

On a : $\|e_1\|^2 = \varphi_A((1,0),(1,0)) = 5$

et on pose $\boxed{u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0)}$

Puis $u'_2 = e_2 - a u_1$ où $a \in \mathbb{R}$ est tq $\varphi_A(u'_2, u_1) = 0$,

On, $\varphi_A(u'_2, u_1) = \varphi_A(e_2, u_1) - a \underbrace{\varphi_A(u_1, u_1)}_{=1} = 0$

(=) $a = \varphi_A(e_2, u_1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi_A(e_2, e_1)$

$= \frac{1}{\sqrt{5}} (0\ 1) \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{\sqrt{5}} (0\ 1) \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

et $u'_2 = (0,1) - \frac{2}{\sqrt{5}} u_1 = (-\frac{2}{5}, 1)$

Mais $\varphi_A(u'_2, u'_2) = 4 \times \left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2}{5} + 2\right)^2 = \frac{16}{25} + \frac{64}{25} = \frac{80}{25} = \frac{16}{5}$

et $u_2 = \frac{u'_2}{\|u'_2\|} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{4}\left(-\frac{2}{5}, 1\right) = u_2}$

TD 32 p6 / Ex 5 / Le problème ici est de montrer l'inégalité triangulaire. Ce n'est pas facile en gd. Mais on va essayer de montrer que c'est une norme <u>euclidienne</u>. Dans ce cas, on saura que c'est une norme !! Pas besoin de redémontrer l'inégalité tri.

On cherche donc un p.s. $\langle \cdot,\cdot \rangle$ sur $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ tq :

$$\forall f \in E, \quad N(f) = \sqrt{\langle f,f \rangle}$$

<u>On définit</u> $\forall f, g \in E, \quad \langle f,g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt.$

On vérifie facilement la symétrie, puis la linéarité à gauche par exemple, donc la bil.

Puis : $\langle f,f \rangle = f(0)^2 + \int_0^1 f'^2(t)\,dt \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.

Enfin, si $\langle f,f \rangle = 0$, alors $f(0)^2 = \int_0^1 f'^2(t)\,dt = 0$

(somme nulle de 2 réels $\geqslant 0$)

donc $f(0) = 0$ et $\int_0^1 f'^2(t)\,dt = 0$

Très important : Or, f'^2 est positive et continue d'intégrale nulle sur $[0,1]$, donc $f'^2 = 0$, ie $f' = 0$ sur $[0,1]$, donc f est <u>cste</u>.

Or, $f(0) = 0$, donc $\boxed{f = 0}$ et $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est déf. positive.

Mais $N(f) = \sqrt{\langle f,f \rangle}$ donc $\boxed{N \text{ est une norme euclidienne}}$

Ex 32 p7. | Ex 6 | Soient $f, g, h \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) Symétrie : $(f|g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)f(t)\,dt = (g|f)$

(ii) bilinéarité : $(\lambda f + g | h) = \frac{1}{\pi}\int_{[0,2\pi]} (\lambda f + g)h$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{[0,2\pi]} (\lambda f h + g h) \quad \Big\} \text{ lin. intégrale}$$

$$= \frac{\lambda}{\pi}\int_{[0,2\pi]} fh + \frac{1}{\pi}\int_{[0,2\pi]} gh$$

$$= \lambda(f|h) + (g|h)$$

donc linéaire à gauche, donc bil. par symétrie.

(iii) déf positive. $(f|f) = \frac{1}{\pi}\int_{[0,2\pi]} f^2 \geq 0$ par positivité de l'int.

Puis, si $(f|f) = 0$, alors f^2 est positive, continue, d'intégrale nulle sur $[0, 2\pi]$, donc $f^2 = 0$ donc $f = 0$

(iv) On doit montrer que :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}^*, \int_0^{2\pi} \cos(nx)\sin(mx)\,dx = 0$

$\forall n, m \in \mathbb{N}$, si $n \neq m$, $\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = 0$

$\forall n, m \in \mathbb{N}^*$, si $n \neq m$, $\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx = 0$

(ie les vecteurs sont 2 à 2 orthogonaux).

Je vous laisse faire. À vos formules de trigo !!

Ex 32 p8 / (v) ⚠ piège : la famille est orthogonale, pas orthonormale a priori.

Mais : $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nx)^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,dx = 1$ si $n \geq 1$

et $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 1\,dx = 2$.

On en déduit que :

$$\begin{cases} \| x \mapsto \cos(nx) \| = \| x \mapsto \sin(nx) \| = 1 & \text{si } n \geq 1 \\ \| 1 \| = \sqrt{2}. \end{cases}$$

donc $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, x \mapsto \cos(nx), x \mapsto \sin(nx)\right)_{n \geq 1}$ est une famille

orthonormale, et

$$f(x) = \left(f \middle| \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{p} \left(f \middle| x \mapsto \cos(nx)\right)\cos(nx)$$

(si $f \in \mathrm{vect}\left(\cos(nx), \sin(nx)\right)_{n \leq p}$)

$$+ \sum_{n=1}^{p} \left(f \middle| x \mapsto \sin(nx)\right)\sin(nx)$$

$$= \frac{1}{2}(f|1) \times 1 + \sum_{n=1}^{p} \left[\left(f | \cos(nx)\right)\cos(nx) + \left(f | \sin(nx)\right)\sin(nx)\right]$$

et les composantes sont donc :

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt, \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(x)\,dx, \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(x)\,dx, \right.$$

$$\left. \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(2x)\,dx, \text{ etc} \dots\right)$$

TD32 p9 | Ex 7 | ⚠ L'inégalité triangulaire, c'est sans les carrés.

On a : $\|\sum_{i=1}^{n} x_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$ (inégalité tri.)

Soit $u = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$
$v = (\|x_1\|, \dots, \|x_n\|) \in \mathbb{R}^n$.

Alors $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$ (produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$)

$\leq \underbrace{\|u\|_n \, \|v\|_n}_{\text{normes dans } \mathbb{R}^n}$ (Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$)

$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2} = \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2}$

donc $\boxed{\|\sum_{i=1}^{n} x_i\| \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2}}$

Ex 8 Soit $u = (\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n})$
$v = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right) \in \mathbb{R}^n$

On utilise Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ avec le p.s. usuel.

$|\langle u, v \rangle| = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{x_i}}{\sqrt{x_i}} = n \overset{C.S.}{\leq} \|u\|_n \, \|v\|_n = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x_i}}^2}$

$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$

$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$.

Ex 9 (i) $u = (1, 2, \dots, n)$
$v = (\sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{n}) \in \mathbb{R}^n$.

Avec C.S. pour le p.s. usuel dans $\mathbb{R}^n$:

$\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \|u\| \, \|v\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}^2}$

$= \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \times \frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$

TD32p10 (ii) De même, C.S. dans $\mathbb{R}^{n-1}$ avec

$$u = (\sqrt{1}, \dots, \sqrt{n-1})$$
$$v = \left(\frac{\sqrt{1}}{n-1}, \dots, \frac{\sqrt{n-1}}{n-(n-1)}\right).$$

Alors $\langle u, v\rangle^2 = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k}\right)^2 \overset{C.S.}{\leq} \|u\|^2 \times \|v\|^2$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k}^2\right) \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\sqrt{k}}{n-k}\right)^2$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} \times \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2}.$$

Ex10 (i) Soit $f \in E$. Comme f est continue sur un intervalle et que f ne s'annule pas, elle est de signe constant. De plus,

$$P(-f) = \left(\int_0^1 (-f(x))dx\right)\left(\int_0^1 -\frac{dx}{f(x)}\right) = P(f).$$

On a donc si $E_+ = \{f \in E \mid f > 0\}$, alors

$$P(E) = P(E^+).$$

On peut donc se contenter de travailler avec des f° strict. positives.

(ii) On a $\boxed{P(1) = 1}$

De plus, E est un espace préhilbertien avec le produit scalaire

$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt$. (Vérifiez que c'est un p.s.!!)

On a : pour $f \in E^+$, $P(f) = \|\sqrt{f}\|^2 \times \|\frac{1}{\sqrt{f}}\|^2 \overset{C.S.}{\geq} \langle \sqrt{f}, \frac{1}{\sqrt{f}}\rangle^2 = 1$!!

et donc $\boxed{\min_{f \in E} (P(f)) = 1}$

Puis : $P(f) = 1$ ssi il y a égalité dans l'inégalité de C.S.

TD32 p11

donc si $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$ sont proportionnelles, ie

si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $\sqrt{f} = \frac{\lambda}{\sqrt{f}}$ ie $f = \lambda$ ie f cste.

donc pour $f \in E^+$, $P(f) = 1 \iff f$ est cste.

et si $f \in E$, $P(f) = 1 \iff P(|f|) = 1 \iff |f|$ cste $\overset{f \text{ signe cste}}{\iff}$ f cste

donc : $\boxed{P(f) = 1 \iff f \text{ est cste.}}$

(iii) Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$.

Alors $f_n \in E^+$, et $P(f_n) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)\left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)\left(\ln(n+1)\right)$

$\sim \frac{\ln(n)}{2}$

donc $\boxed{P(f_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty}$

et donc $\boxed{\sup_{f \in E} (P(f)) = +\infty}$

Ex11 On suppose que : $\forall x, y \in E$, $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

On a donc :

$\forall x, y \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$\| f(\lambda x + y) - \lambda f(x) - f(y) \|^2 = \langle f(\lambda x + y) - \lambda f(x) - f(y), f(\lambda x + y) - \lambda f(x) - f(y) \rangle$

$\underset{\text{sym.}}{\overset{\text{bil.}}{=}} \| f(\lambda x + y) \|^2 + \| \lambda f(x) \|^2 + \| f(y) \|^2 + 2\lambda \langle f(\lambda x + y), f(x) \rangle$

$- 2 \langle f(\lambda x + y), f(y) \rangle + 2\lambda \langle f(x), f(y) \rangle$

$\underset{\text{le p.s.}}{\overset{f \text{ conserve}}{=}} \| \lambda x + y \|^2 + \lambda^2 \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\lambda \langle \lambda x + y, x \rangle - 2 \langle \lambda x + y, y \rangle$

$+ 2\lambda \langle x, y \rangle \overset{\text{bir.}}{=} 0$

et donc $f(\lambda x+y) - \lambda f(x) - f(y) = 0$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

(Ex 12) (i) <u>Si p est un projecteur orthogonal:</u> Soit $x \in E$.

Alors $x = p(x) + (x - p(x))$ et $\langle p(x), x - p(x) \rangle = 0$

(car $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)^{\perp}$)

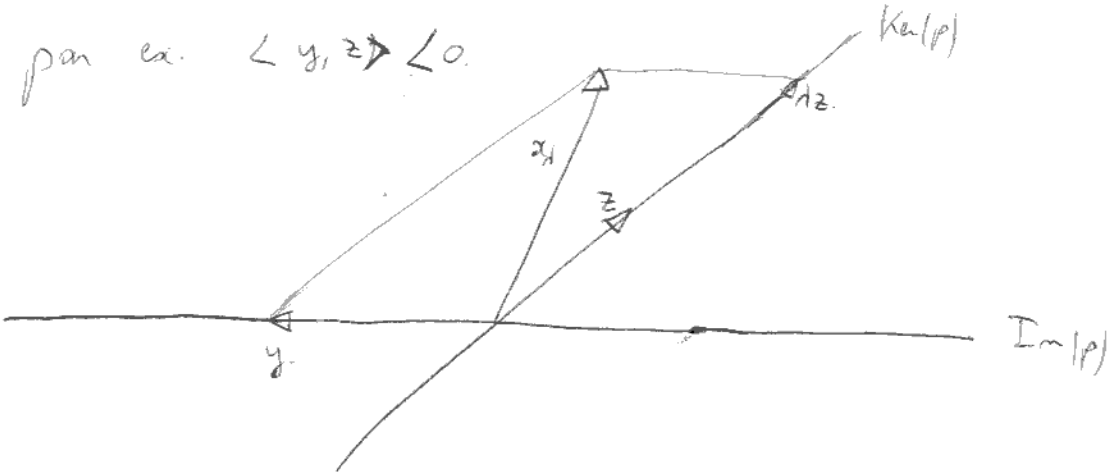
donc $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2$ (Pythagore)

$\geq \|p(x)\|^2$.

(ii) <u>Si p n'est pas un projecteur orthogonal:</u>

Il existe donc $y \in \mathrm{Im}(p)$ et $z \in \mathrm{Ker}(p)$ tq $\langle y, z \rangle \neq 0$,

par ex. $\langle y, z \rangle < 0$.



Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ soit $x_\lambda = y + \lambda z$.

<u>On a:</u> $p(x_\lambda) = y$ et $\|p(x_\lambda)\| = \|y\|$

et $\|x_\lambda\|^2 = \|y\|^2 + \lambda^2\|z\|^2 + 2\lambda\langle y, z\rangle$

et on a: $\|p(x_\lambda)\|^2 > \|x_\lambda\|^2$

$\Leftrightarrow \quad 0 > \lambda^2\|z\|^2 + 2\lambda\langle y, z\rangle$

$\Leftrightarrow \quad -2\lambda\langle y, z\rangle > \lambda^2\|z\|^2$

$\overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} \quad \lambda < -\dfrac{2\langle y, z\rangle}{\|z\|^2}$

Un tel λ existe car $\langle y, z\rangle < 0$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$

TD 32 p 13 $\quad$ fq $\|p(x_A)\| > \|x_A\|$.

On a donc montré l'équivalence.

$\boxed{\text{Ex 13}}$ (i) Soit $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Pour $(x,y,z), (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + 2y = a \\ x + 2z = b \\ 3z = c \end{cases} \iff \begin{cases} x = b - \frac{2}{3}c \\ y = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \frac{c}{3} \\ z = c/3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2/3 \\ 1/2 & -1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

donc $P \in GL_3(\mathbb{R})$ donc $\mathcal{B}'$ est une base et $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

(ii) Soit $F = \{ x e_1 + y e_2 + z e_3 \mid x + y + z = 0 \}$

Alors $x e_1 + y e_2 + z e_3 \in F \iff z = -x - y$

$\iff x e_1 + y e_2 + z e_3 = x(e_1 - e_3) + y(e_2 - e_3)$

et $\boxed{F = \mathrm{vect}(e_1 - e_3, e_2 - e_3)}$

Soit $u = x e_1 + y e_2 + z e_3$ et p la projection orthogonale sur F.

Alors $p(u) \in F$, ie $p(u) = a(e_1 - e_3) + b(e_2 - e_3)$ $(a, b \in \mathbb{R})$

et $u - p(u) \in F^\perp$

ie $\langle u - p(u), e_1 - e_3 \rangle = \langle u - p(u), e_2 - e_3 \rangle = 0$

Mais $\langle u, e_1 - e_3 \rangle = x - z$ $\quad$ ($\underline{\text{b.o.n.}}$)

$\langle p(u), e_1 - e_3 \rangle = a + a + b = 2a + b$

donc $\boxed{2a + b = x - z}$

Puis $\langle u, e_2 - e_3 \rangle = y - z$ et $\langle p(u), e_2 - e_3 \rangle = b + a + b = a + 2b$

donc $\boxed{a + 2b = y - z}$

donc $\begin{cases} 2a+b=x-z \\ a+2b=y-z \end{cases}$ donc $\begin{cases} 3a=2x-y-z \\ 3b=-x+2y-z \end{cases}$

donc $p(u) = \frac{1}{3}(2x-y-z)(e_1-e_3) + \frac{1}{3}(-x+2y-z)(e_2-e_3)$

$= \frac{1}{3}(2x-y-z)e_1 + \frac{1}{3}(-x+2y-z)e_2 + \frac{1}{3}(-x-y+2z)e_3$

donc $\boxed{Mat_B(p) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$

(Petite vérif : $\text{tr}(Mat_B(p)) = \frac{1}{3}(2+2+2) = 2$
et $\dim(F) = 2$: ok, puisque p est une projection)

Enfin, $Mat_{B'}(p) = P^{-1} Mat_B(p) P$

$= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 14 & -4 & -10 \\ -4 & 14 & -10 \\ -4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

$= \boxed{\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -2 & -5 \\ -2 & 7 & -5 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}}$

Ex 14 Notons $B = (e_1, e_2, e_3)$ ⚠ pas la base canonique a priori.

On a $A^2 = A$ donc $f \circ f = f$ donc f est une projection.

Puis $rg(A) = 1$ (les col. sont prop.) donc $\boxed{rg(f) = 1}$

Puis $f(e_1) = \frac{1}{14}(e_1 + 2e_2 + 3e_3)$ donc $\boxed{Im(f) = vect(e_1 + 2e_2 + 3e_3)}$

Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$. Alors $u \in Ker(f) \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff x + 2y + 3z = 0$ et $Ker(f) = \{xe_1 + ye_2 + ze_3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$

TD24 p15 | Or, par le théo du rang, $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f))=2}$

De plus, si $xe_1+ye_2+ze_3 \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $\langle xe_1+ye_2+ze_3, e_1+2e_2+3e_3\rangle \overset{\text{b.o.n}}{=} x+2y+3z = 0$

donc $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)^\perp$. Mais $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2 = \dim(\mathrm{Im}(f))^\perp$

donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)^\perp}$ et $\boxed{f \text{ est une projection orthogonale.}}$

Ex 16 1. (i) Symétrie : ok.

(ii) bil : lin à gauche et symétrie : ok

faits en classe.

(iii) Déf pos : Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors $S(P,P) = \int_0^1 P^2(x)\,dx \geq 0$ (pos. de l'int.)

De plus, si $S(P,P)=0$, alors $\int_0^1 P^2(x)\,dx = 0$, et P^2 est positive et continue sur $[0,1]$, d'intégrale nulle, donc :

$$\forall x \in [0,1],\ P(x)=0$$

Donc P a une infinité de racines, donc $P=0$

fondamental

2. On applique le procédé de Schmidt à la base canonique.

On pose $e_1=1$, $e_2=X$, $e_3=X^2$.

Soit $\boxed{u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}}$ Or, $\|e_1\|^2 = S(e_1,e_1) = \int_0^1 1^2\,dx = 2$

donc $\boxed{u_1 = e_1 = 1}$

Puis $u_2' = e_2 - a u_1$ où $a \in \mathbb{R}$ et tq $S(u_2', u_1) = 0$,

ie $S(e_2 - a u_1, u_1) = 0$ ie $\boxed{a = S(e_2, u_1)}$

TD24 p16 | a, $S(e_2, u_1) = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$

donc $\boxed{u'_2 = X - \frac{1}{2}}$

Puis $\|u'_2\|^2 = \int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 dx \overset{\text{calculs}}{=} \frac{1}{12}$

et $u_2 = \frac{u'_2}{\|u'_2\|} = 2\sqrt{3}\left(X - \frac{1}{2}\right) = \boxed{\sqrt{3}(2X-1) = u_2}$

Puis $u'_3 = e_3 - b u_1 - c u_2$ où $b, c \in \mathbb{R}$ sont tq

$$S(u'_3, u_1) = S(u'_3, u_2) = 0.$$

On obtient $b = S(e_3, u_1) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

Comme d'habitude, mais faites les calculs pour vous entraîner

$$c = S(e_3, u_2) = \int_0^1 x^2(\sqrt{3}(2x-1))\,dx$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 (2x^3 - x^2)\,dx$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

et $u'_3 = X^2 - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} \times \sqrt{3}(2X-1)$

$= \boxed{X^2 - X + \frac{1}{6} = u'_3}$

Puis $\|u'_3\|^2 = S(u'_3, u'_3) = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx \overset{\text{calculs}}{=} \frac{1}{180}$

et $u_3 = \frac{u'_3}{\|u'_3\|} = \boxed{6\sqrt{5}\left(X^2 - X + \frac{1}{6}\right) = u_3}$

3. On a : $\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx = \|X^2 - (aX + b)\|^2$

donc $\min_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx = \min_{a,b\in\mathbb{R}} \|X^2 - (aX+b)\|^2$

$= \min_{P\in\mathbb{R}_1[X]} \|X^2 - P\|^2 = \boxed{\left(d(X^2, \mathbb{R}_1[X])\right)^2}$!!

TD 24 p17

On va donc calculer $d(X^2, \mathbb{R}_1[X])$.

Or, $d(X^2, \mathbb{R}_1[X]) = \|X^2 - P\|$ où P est le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$

Or, le procédé de Schmidt nous assure que

$\mathbb{R}_1[X] = \text{vect}(1, X) = \text{vect}(u_1, u_2)$.

donc (u_1, u_2) est une bon de $\mathbb{R}_1[X]$

donc $P = S(X^2, u_1) u_1 + S(X^2, u_2) u_2$

et $\|X^2 - P\| = \|X^2 - S(X^2, u_1)u_1 - S(X^2, u_2)u_2\|$ Regardez bien, c'est u'_3 !!

$= \|u'_3\| = \sqrt{\frac{1}{180}}$!!!

et donc $\boxed{\min_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx = \frac{1}{180}}$

$\boxed{\text{Ex 16}}$ $\underline{1^{er} \text{ cas}}$: $\mathbb{R}^4$. ⚠ $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ n'est $\underline{\underline{\text{pas}}}$ la base can. a priori

Soit $F = \{ x e_1 + y e_2 + z e_3 + t e_4 \mid x + y + z + t = x - y + z - t = 0 \}$

Soit $u = x e_1 + \dots + t e_4 \in \mathbb{R}^4$

$\underline{\text{Alors}}$: $u \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ t = -y \end{cases} \Leftrightarrow u = x(e_1 - e_3) + y(e_2 - e_4)$

et $\boxed{F = \text{vect}(e_1 - e_3, e_2 - e_4)}$ (c'est une base car...)

Soit p la projection orthogonale sur F.

Alors $p(u) \in F$ donc $p(u) = a(e_1 - e_3) + b(e_2 - e_4) = a e_1 + b e_2 - a e_3 - b e_4$

TD24 p18 Puis, $u - p(u) \in F^\perp$

$\Leftrightarrow \langle u-p(u), e_1-e_3 \rangle = \langle u-p(u), e_2-e_4 \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \langle u, e_1-e_3 \rangle = \langle p(u), e_1-e_3 \rangle \\ \langle u, e_2-e_4 \rangle = \langle p(u), e_2-e_4 \rangle \end{cases}$

Bon. $\Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 2a \\ y - t = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}(x-z) \\ b = \frac{1}{2}(y-t) \end{cases}$

et $p(u) = \frac{1}{2}(x-z)e_1 + \frac{1}{2}(y-t)e_2 - \frac{1}{2}(x-z)e_3 - \frac{1}{2}(y-t)e_4$

et la matrice est : $\boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ (Remarque : la trace est bien la dimension de F)

2ème cas : Montrons d'abord que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

Je vous laisse faire la symétrie et la bilinéarité.

Déf pos. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Alors $\langle P, P \rangle = \sum_{i=-1}^{2} P(i)^2 \geq 0$

important : et si $\langle P, P \rangle = 0$, on a $\sum_{i=-1}^{2} P(i)^2 = 0$, donc $P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = 0$, donc P a au moins 4 racines et $\deg(P) \leq 3$, donc $P = 0$

Puis, comme avant, on trouve $\boxed{F = \text{vect}(1-X^2, X-X^3)}$

Puis, si $P = x + yX + zX^2 + tX^3$, alors $p(P) = a(1-X^2) + b(X-X^3)$
$= a + bX - aX^2 - bX^3$
(où $a, b \in \mathbb{R}$)

TD 24 p19

et $P - p(P) \in F^{\perp}$

$\Leftrightarrow \quad \langle P - p(P), 1-x^2 \rangle = \langle P - p(P), x - x^3 \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \langle P, 1-x^2 \rangle = \langle p(P), 1-x^2 \rangle \\ \langle P, x-x^3 \rangle = \langle p(P), x-x^3 \rangle \end{cases}$

Or, $\langle P, 1-x^2 \rangle = P(-1)(1-(-1)^2) + P(0)\times 1 + P(1)\times(1-1^2) + P(2)(1-2^2)$

$= P(0) - 3P(2)$

$= x - 3(x + 2y + 4z + 8t)$

$= -2x - 6y - 12z - 24t.$

et $\langle p(P), 1-x^2 \rangle = p(P)(0) - 3\,p(P)(2)$

$= a - 3(a + 2b - 4a - 8b)$

$= a - 3(-3a - 6b)$

$= 10a + 18b$

donc $10a + 18b = -2x - 6y - 12z - 24t$

donc $\boxed{5a + 9b = -x - 3y - 6z - 12t}$

Puis $\langle P, x-x^3 \rangle = P(-1)(-1-(-1)^3) + P(0)(0-0^3) + P(1)(1-1^3) + P(2)(2-2^3)$

$= -6P(2) = -6(x + 2y + 4z + 8t).$

et $\langle p(P), x-x^3 \rangle = -6\,p(P)(2) = -6(a + 2b - 4a - 8b)$

$= -6(-3a - 6b)$

donc $\boxed{3a + 6b = -x - 2y - 4z - 8t}$

donc $\boxed{a = x}$ et $\boxed{b = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y - 6z - 12t.}$

et $p(P) = x + \left(-\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y - 6z - 12t\right)X - xX^2 + \left(\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y + 6z + 12t\right)X^3$

et la matrice est $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & -4/3 & -6 & -12 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 4/3 & 6 & 12 \end{pmatrix}}$

TD24 p20 | $\boxed{\text{Ex 17}}$ Notons qu'on ne sait même pas si E est de dimension finie !!

(i) Pour $j \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} (e_j|e_i)^2 = \|e_j\|^2$

donc $\|e_j\|^2 + \sum_{i \neq j} (e_j|e_i)^2 = \|e_j\|^2$

donc $\sum_{i \neq j} (e_j|e_i)^2$ <u>donc</u> : $\forall i \neq j$, $(e_j|e_i) = 0$

Ceci est vrai pour <u>tout</u> j, donc $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthogonale. Comme tous les vecteurs sont unitaires, c'est une famille orthonormale.

(ii) Soit $F = \text{vect}(e_1, \dots, e_n)$. Montrons que $E = F$. Cela prouvera que $(e_1, \dots, e_n)$ est une b.o.n. de E.

On a bien sûr $F \subset E$.

Comme F est de dim. finie, on a $E = F \oplus F^\perp$

Soit $x \in F^\perp$. Alors : $\forall i = 1, \dots, n$, $(x|e_i) = 0$,

et donc $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2 = 0$ donc $x = 0$

et $F^\perp = \{0\}$ et $E = F$.

$\boxed{\text{Ex 18}}$ (i) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un p.s. sur E : cf ex. 5

(ii) ⚠ V n'est pas un sev de E !!

Or, si $P_0 = 2X - 1$, alors $P_0 \in V$.

Puis, si $W = V - P_0$, alors $\boxed{W = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}}$

est un sev de E et $\boxed{V = P_0 + W}$

⚠ W n'est pas de dim. finie.

TD24 p21 | Soit donc $f \in V$.

On a : $\int_0^1 e^t f(t)\,dt \overset{IPP}{=} [e^t f(t)]_0^1 - \int_0^1 e^t f'(t)\,dt$ } $f \in V$

$= e+1 - \int_0^1 e^t f'(t)\,dt$

donc $I(f) = \int_0^1 f'(t)^2\,dt + 2\left(e+1 - \int_0^1 e^t f'(t)\,dt\right)$

$= \int_0^1 \left(f'(t)^2 - 2e^t f'(t) + e^{2t}\right)dt + 2+2e - \int_0^1 e^{2t}\,dt$

$= \int_0^1 (f'(t) - e^t)^2\,dt + 2+2e - \left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_0^1$

$= \int_0^1 (f'(t)-e^t)^2\,dt + 2+2e - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}$

Or : $\int_0^1 (f'(t)-e^t)^2\,dt = \|f - \exp\|^2 - (f(0)-e^0)^2$ } $f \in V$

$= \|f-\exp\|^2 - 4$

donc $\boxed{I(f) = \|f - \exp\|^2 + \underbrace{2e - \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}}_{=\lambda}}$

Soit $h = f - f_0 \in W$.

Alors $\boxed{I(f) = I(f_0 + h) = \|h - (\exp - f_0)\|^2 + \lambda}$

On doit donc minimiser $\|h - (\exp - f_0)\|$ lorsque h parcourt W.

On doit donc trouver le projeté orthogonal de $\exp - f_0$ sur W, même si W n'est pas de dim. finie.

On cherche donc $h_0 \in W$ tq $h_0 - \exp + f_0 \in W^\perp$

ou encore $f_0 \in V$ tq $f_0 - \exp \in W^\perp$ ie $f_0 \in V$ tq $\langle f_0 - \exp, g\rangle = 0$ dès que $g \in W$

TD 24 p22 Soit $g \in W$.

Alors : $\langle f_0 - \exp, g \rangle = \underset{\overset{\parallel}{0}}{g(0)} (f_0(0) - 1) + \int_0^1 (f_0'(x) - e^x) g'(x)\,dx$

Ici, on ajoute une condition où f_0 : $f_0 \in \mathcal{C}^2[0,1]$

$$= \int_0^1 (f_0'(x) - e^x) g'(x)\,dx$$

$$\overset{IPP}{=} \left[(f_0'(x) - e^x) g(x) \right]_0^1 - \int_0^1 (f_0''(x) - e^x) g(x)\,dx$$

$$\overset{g \in W}{=} -\int_0^1 (f_0''(x) - e^x) g(x)\,dx \quad (1)$$

Donc, si $f_0(x) = e^x + ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$, alors $f_0''(x) - e^x = 0$ pour tout $x \in [0,1]$

et (1) est nul, donc $f_0 - \exp \in W^\perp$.

Mais on veut aussi $f_0 \in V$, donc $f_0(0) = -1$ et $f_0(1) = 1$,

donc $1 + b = -1$ donc $\boxed{b = -2}$

et $e + a + b = 1$ donc $a = 1 - b - e = 3 - e$

et $\boxed{f_0(x) = e^x + (3-e)x - 2.}$

Ex 19 1. Soit $p = rg(x_1, \dots, x_m)$. Quitte à permuter les vecteurs, on peut supposer $(x_1, \dots, x_p)$ libre, et $x_{p+1}, \dots, x_m \in vect(x_1, \dots, x_p)$

Soient $C_1, \dots, C_m$ les col. de G $(= G(x_1, \dots, x_m))$

Pour $\ell \geq p+1$, il existe $\lambda_{k\ell} \in \mathbb{R}$ $(k = 1, \dots, p)$ tq $x_\ell = \sum_{k=1}^p \lambda_{k\ell} x_k$

Mais alors pour $i = 1, \dots, m$ $(x_i | x_\ell) = \sum_{k=1}^p \lambda_{k\ell} (x_i | x_k)$ (ième ligne des colonnes)

et donc $C_\ell = \sum_{k=1}^p \lambda_{k\ell} C_k$ et $\boxed{rg(G) \leq p}$.

Mque $(C_1, \dots, C_p)$ est libre. Cela prouvera que $rg(G) = p$

TD 24 p23

Si $\sum_{k=1}^{p} \mu_k c_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $(\mu_k \in \mathbb{R})$, alors

$\forall i = 1, ..., n, \quad \sum_{k=1}^{p} \mu_k (x_i | x_k) = 0$ donc $\left(x_i \mid \sum_{k=1}^{p} \mu_k x_k\right) = 0$ (bil)

donc $\sum_{k=1}^{p} \mu_k x_k \in \text{vect}(x_1, ..., x_p)^\perp \cap \text{vect}(x_1, ..., x_p) = \{0\}$

donc $\sum_{k=1}^{p} \mu_k x_k = 0$ donc $\mu_1 = \cdots = \mu_p = 0$ ($(x_1, ..., x_p)$ est libre)

et $(c_1, ..., c_p)$ est libre.

2. On a : $(x_1, ..., x_n)$ liée $\Leftrightarrow \text{rg}(x_1, ..., x_n) < n \Leftrightarrow \text{rg}(G) < n$

$\Leftrightarrow \gamma(x_1, ..., x_n) = 0$

Mq que $\gamma(x_1, ..., x_n) \geq 0$. Il reste à montrer que si $(x_1, ..., x_n)$ est libre, alors $\gamma(x_1, ..., x_n) > 0$. On suppose donc $(x_1, ..., x_n)$ libre.

Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une b.o.n. de $F = \text{vect}(x_1, ..., x_n)$ et $A = (a_{ij}) = \text{Mat}_B(x_1, ..., x_n)$

Comme B est une bon, pour $i, j \in [\![1, n]\!]$,

$(x_i | x_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}$: c'est le coef. (i,j) de

${}^tAA$!! Donc $\boxed{G = {}^tAA}$ et $\gamma(x_1, ..., x_n) = \det({}^tA)\det(A) = \det(A)^2 > 0$

3. Soit p la projection orthogonale sur F. Soit $x \in E$.

Alors $d^2(x, F) = \|x - p(x)\|^2$

Or, $(x - p(x) | x_i) = 0$ pour tout $i = 1, ..., n$.

donc $(x | x_i) = (p(x) | x_i)$. De plus, $p(x) \in F$

TD 24, p 24

donc $p(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ où $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Alors : $\gamma(x, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} (x|x) & (x|x_1) & \cdots & (x|x_n) \\ (x_1|x) & & & \\ \vdots & & & \\ (x_n|x) & & & \end{vmatrix}$

$L_1 \leftarrow L_1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_{i+1}$

$\underline{\underline{\text{et lin.}}}$ $\begin{vmatrix} (x-p(x)|x) & \overset{=0}{(x-p(x)|x_1)} & \cdots & \overset{=0}{(x-p(x)|x_n)} \\ (x_1|x) & & & \\ \vdots & & (x_i|x_j) & \\ (x_n|x) & & & \end{vmatrix}$

$\underline{\underline{\text{dvt}/L_1}}$ $(x-p(x)|x) \times \gamma(x_1, \dots, x_n)$

Or, $(x-p(x)|x) = (x-p(x)|x-p(x)) = \|x-p(x)\|^2$

car $(\underbrace{x-p(x)}_{\in F^\perp} | \underbrace{p(x)}_{\in F}) = 0$

donc $\boxed{\gamma(x, x_1, \dots, x_n) = \|x-p(x)\|^2 \gamma(x_1, \dots, x_n)}$

et $\gamma(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ par 2°, donc $d^2(x, F) = \dfrac{\gamma(x, x_1, \dots, x_n)}{\gamma(x_1, \dots, x_n)}$