TD30 Ex 1

1. On a $\frac{n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$. Par équiv. de séries à termes ≥ 0, $\boxed{\sum \frac{n}{n^2+1} \text{ diverge.}}$

2. On a $\frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$ et $\sum 1/n$ div. et est à termes ≥ 0 : $\boxed{\sum \frac{\ln(n)}{n} \text{ div.}}$

3. On a $n^{3/2} \times \frac{\ln(n)}{n^2} = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (crois. comparées)

Par le critère de Riemann, $\boxed{\sum \frac{\ln(n)}{n^2} \text{ conv.}}$

4. $\frac{(-1)^n \ln^3(n)}{n^3} = o(1/n^2)$ et $\sum 1/n^2$ est conv. à termes positifs

↳ crois. comp.

donc $\boxed{\sum \frac{(-1)^n \ln^3(n)}{n^3} \text{ conv. absolument.}}$

5. On a $ch(n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}$ donc $\frac{1}{ch(n)} \sim \frac{2}{e^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (crois. comp)

et $\sum 1/n^2$ conv. et est à termes ≥ 0, donc $\boxed{\sum \frac{1}{ch(n)} \text{ conv.}}$

6. $th(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\frac{1}{th(n)} \not\to 0$ et $\boxed{\sum \frac{1}{th(n)} \text{ div. grossièrement.}}$

7. $\left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right| \sim \frac{1}{n^2}$ donc $\boxed{\sum \frac{(-1)^n}{n^2+1} \text{ conv. absolument.}}$

8. On a $\frac{ch(n)}{ch(2n)} \sim \frac{e^n/2}{e^{2n}/2} = \frac{1}{e^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc de m̂ $\boxed{\sum \frac{ch(n)}{ch(2n)} \text{ conv.}}$

9. $\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2-1}\sqrt{n^2+1}} \sim \frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}}{n \times n}$

Or, $\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} = \frac{(n^2+1) - (n^2-1)}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} \sim \frac{2}{2n} = 1/n$

↳ à justifier, pas de somme d'équiv !!

donc $\boxed{\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \sim \frac{1}{n}}$ Par comparaison de séries à termes ≥ 0 $\boxed{\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right) \text{ div.}}$

TD30 p2

10. $e^{-\sqrt{n}} = o(1/n^2)$ donc par comparaison de séries à termes ≥ 0

$\boxed{\sum e^{-\sqrt{n}} \text{ conv.}}$

11. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série spéciale alternée : elle converge.

(⚠ pas de convergence absolue, $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge)

12. $\sqrt{e^{\sqrt{n} + \sin(n)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

donc $\boxed{\text{la série diverge grossièrement.}}$

13. $n^{2013} e^{-\sqrt{n}} = o(1/n^2)$ par croiss. comparée.

donc par comparaisons de séries à termes ≥ 0, $\boxed{\sum_{n\geq 0} n^{2013} e^{-\sqrt{n}} \text{ conv.}}$

Ex2 1. $\min(u_n, v_n) \leq u_n$ et par comparaison de séries à termes ≥ 0,

$\boxed{\sum \min(u_n, v_n) \text{ converge.}}$

2. $\max(u_n, v_n) \leq u_n + v_n$ et $\sum (u_n + v_n)$ conv. (somme de séries convergentes)

et est à termes positifs, et $\max(u_n, v_n)$ aussi, donc

$\boxed{\sum \max(u_n, v_n) \text{ converge.}}$

3. On a $\sqrt{u_n v_n} \leq \max(u_n, v_n)$. Par comparaison de séries à termes ≥ 0, $\boxed{\sum \sqrt{u_n v_n} \text{ conv.}}$

4. $\frac{u_n v_n}{u_n + v_n} = u_n \times \frac{v_n}{u_n + v_n} \leq u_n$ (tout est ≥ 0)

donc le m̂ argument prouve la convergence.

TD30 p3 / Ex 3 Notez la différence avec l'ex 1 : ici, il va falloir passer aux sommes partielles pour obtenir la somme de la série. Cela prouvera aussi la convergence. Mais on peut aussi remarquer qu'en gd, on peut prouver la convergence sans les sommes partielles. Je le mettrai à la fin en remarque.

1. Pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ (DES !!)

$$\overset{\text{télesc.}}{=} 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

donc $\boxed{\sum \frac{1}{n(n+1)} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1}$

Notez la différence entre la série et sa somme.

Rem : $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n^2} \geq 0$ donc $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ conv.

2. On a : pour $n \geq 2$, $u_n = \frac{n 2^n}{(n-1)!} = \frac{(n-1) 2^n}{(n-1)!} + \frac{2^n}{(n-1)!}$

$$= \frac{2^n}{(n-2)!} + \frac{2^n}{(n-1)!} = 4 \times \frac{2^{n-2}}{(n-2)!} + 2 \times \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$$

et $\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + \sum_{k=2}^{n} u_k = 2 + 4 \times \sum_{k=2}^{n} \frac{2^{k-2}}{(k-2)!} + 2 \times \sum_{k=2}^{n} \frac{2^{k-1}}{(k-1)!}$

$$= 2 + 4 \sum_{l=0}^{n-2} \frac{2^l}{l!} + 2 \sum_{l=1}^{n-1} \frac{2^l}{l!} = 4 \times \sum_{l=0}^{n-2} \frac{2^l}{l!} + 2 \sum_{l=0}^{n-1} \frac{2^l}{l!}$$

cas $l=0$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{*} 4 \times e^2 + 2 \times e^2 = 6e^2$$

donc $\boxed{\sum_{n \geq 1} \frac{n 2^n}{n!} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 2^n}{n!} = 6e^2}$

(*) : cf cours : $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^x$

TD 30 p4 | 3. On se rappelle que $\arctan(x) - \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$

dès que $x, y > 0$.

Avec $x = n+1$ et $x = n$, on a :

$$\arctan(n+1) - \arctan(n) = \arctan\left(\frac{1}{1+n(n+1)}\right)$$

donc $$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\arctan(1+k+k^2)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\arctan(k+1) - \arctan(k)\right)$$

$$\overset{\text{télesc.}}{=} \arctan(n+1) - \arctan(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

donc $\boxed{\sum_n \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \frac{\pi}{2}}$

Rem : $\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) \sim \frac{1}{n^2+n+1} \sim \frac{1}{n^2}$ donc la série converge.

4. Pour $n \geqslant 1$, $\ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right) = \ln\left(\frac{n+2}{n}\right) - \ln\left(\frac{n+3}{n+1}\right)$

donc $$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\ln\left(\frac{k+2}{k}\right) - \ln\left(\frac{k+3}{k+1}\right)\right)$$

$$\overset{\text{télesc.}}{=} \ln(3) - \ln\left(\frac{n+3}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(3)$$

donc $\boxed{\sum \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right) \text{ conv. et } \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right) = \ln(3)}$

Rem : $\ln\Big(\underbrace{\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}\Big) \sim \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)} - 1 = \frac{n^2+3n+2-n^2-3n}{n(n+3)} \sim \frac{2}{n^2}$

donc la série converge.

TD30 p5 / 5. Une DES donne $\dfrac{1}{x(x+1)(2x+1)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{4}{2x+1}$

$$\text{et } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}$$

$$= 2\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}_{=h_n} + \frac{1}{n+1} - 1 - 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}$$

$$= 2h_n - 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{n+1} - 1.$$

Or : $h_{2n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{1}{k}$

$$= \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{2l} + \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{2l+1}.$$

$$\text{donc } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{2l+1} - 1$$

$$= h_{2n+1} - \frac{1}{2} h_n - 1$$

$$\text{donc } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(2k+1)} = 2h_n - 4\left(h_{2n+1} - \frac{1}{2}h_n - 1\right) + \frac{1}{n+1} - 1.$$

$$= 4h_n - 4h_{2n+1} + 3 + \frac{1}{n+1}.$$

Or, on a vu en TD sur les suites que $\boxed{h_n - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma}$

(cste d'Euler : $\gamma = 0{,}577$ à 10^{-3} près)

$$\text{donc } h_n - h_{2n+1} = \left(h_n - \ln(n)\right) + \ln(n) - \left(h_{2n+1} - \ln(2n+1)\right) - \ln(2n+1)$$

$$= \left(h_n - \ln(n)\right) - \left(h_{2n+1} - \ln(2n+1)\right) - \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma - \gamma - \ln(2) = -\ln(2)$$

TD30 p6

donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(2k+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4(-\ln(2)) + 3$

donc $\boxed{\sum_n \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)(n+1)} = 3 - 4\ln(2)}$

Rem : $\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} \sim \frac{1}{2n^3}$ donc la série converge.

6. Pour $n \geq 2$, $\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$

et $\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \overset{\text{télesc.}}{=} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln(2) \to -\ln(2)$

donc $\boxed{\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \text{ conv et } \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln(2)}$

Rem. 1. C'est une série à termes négatifs car $1 - \frac{1}{n^2} < 1$

2. $\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{n^2}$ donc la série converge absolument.

Ex4 1. Si $\sum u_n$ converge : Alors $0 \leq v_n \leq u_n$ $(u_n \geq 0)$

donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum v_n$ converge.

2. Si $\sum v_n$ converge : On a $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$ donc $v_n(1+u_n) = u_n$

donc $u_n(1 - v_n) = v_n$. Or, $v_n \to 0$ car $\sum v_n$ converge,

donc pour n assez grand, $v_n \leq \frac{1}{2}$, et comme $v_n \geq 0$ (car $u_n \geq 0$)

on a $0 \leq v_n \leq \frac{1}{2}$, donc $\frac{1}{2} \leq 1 - v_n \leq 1$ donc $u_n = \frac{v_n}{1 - v_n} \leq 2v_n$.

Par comparaison de séries à signe positif, $\sum u_n$ converge.

TD30 p7 | Ex 5 | 1. Si $\alpha > 1$. Alors $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}\right)$

car $\frac{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}{n^\alpha \ln^\beta(n)} = \frac{n^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\ln^\beta(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\frac{1-\alpha}{2} < 0$.

Or, $\frac{1+\alpha}{2} > 1$, donc $\sum \frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}$ est convergente à termes positifs, donc $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ converge. (On peut aussi utiliser la règle de Riemann.)

2. Si $\alpha < 1$. On a $n^{\frac{1+\alpha}{2}} \times \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} = \frac{n^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\ln^\beta(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (croiss. comparées, $\frac{1-\alpha}{2} > 0$)

et $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} > 0$, donc par la règle de Riemann,

$\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ diverge. (ou : $\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}} = o\left(\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}\right)$ et $\sum \frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}$ div. car $\frac{1+\alpha}{2} < 1$)

Rem : Si $\alpha < 0$, la série div. grossièrement.

3. Si $\alpha = 1$. (i) Si $\beta \leq 0$. Alors $\frac{1}{n \ln^\beta(n)} \geq \frac{1}{n}$ donc $\sum \frac{1}{n \ln^\beta(n)}$ diverge.

(ii) Si $\beta > 0$: la f° $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln^\beta(x)}$ est décroissante sur $]2, +\infty[$, et positive

(car $x \mapsto x \ln^\beta(x)$ est croissante et positive car $\beta > 0$)

donc $\sum \frac{1}{n \ln^\beta(n)}$ et $\left(\int_2^n f(x)\,dx\right)_n$ ont m̂ nature.

Or : $\int_2^n f(x)\,dx = \int_2^n \ln^{-\beta}(x) \ln'(x)\,dx \overset{\text{si } \beta \neq 1}{=} \left[\frac{\ln^{1-\beta}(x)}{1-\beta}\right]_2^n$

$= \frac{1}{1-\beta}\left(\ln^{1-\beta}(n) - \ln^{1-\beta}(2)\right)$

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < \beta < 1 \\ -\frac{(\ln(2))^{1-\beta}}{1-\beta} & \text{si } \beta > 1 \end{cases}$

TD 30 p8

donc $\boxed{\sum \frac{1}{n\ln^{\beta}(n)} \text{ converge si } \beta > 1, \text{ diverge si } 0 < \beta < 1.}$

Enfin, si $\beta = 1$, $\int_2^n f(x)\,dx = \int_2^n \frac{\ln'(x)}{\ln(x)}\,dx = \left[\ln(|\ln(x)|)\right]_2^n$

$= \ln(\ln(n)) - \ln(|\ln(2)|) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

donc $\boxed{\sum \frac{1}{n\ln(n)} \text{ diverge.}}$

$\boxed{\text{Ex 6}}$ La série $\sum (-1)^n u_n$ converge, donc la suite des restes $(R_n)_n$ converge.

<u>Rappel</u> $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p u_p \quad \left(\text{ie } \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{p} (-1)^k u_k \right)$

---

et si $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$, les suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes, et si $S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$, alors :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \begin{array}{l} S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} \\ R_n = S - S_n. \end{array} \right.$ $\quad$ $\left((S_{2n}) \text{ est décroiss. et } (S_{2n+1}) \text{ est croiss.} \right)$

<u>On a donc, pour $n \in \mathbb{N}$:</u> $\quad -u_{2n+1} = S_{2n+1} - S_{2n} \leq S - S_{2n} = R_{2n} \leq 0$

et $\quad 0 \leq R_{2n+1} = S - S_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = u_{2n+2}$

<u>donc</u> $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad |R_{2n}| \leq u_{2n+1}$

$\quad |R_{2n+1}| \leq u_{2n+2}$

<u>donc</u> $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |R_n| \leq u_{n+1}}$

TD30 p9 | $\boxed{\text{Ex7}}$ 1. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell > 1$.

Soit $\alpha = \frac{\ell+1}{2} \in]1, \ell[$. Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell > \alpha$, il existe

$n_0 \in \mathbb{N}$ tq, si $n \geq n_0$ alors $\frac{u_n}{u_{n-1}} \geq \alpha$.

Or, les termes sont strict. positifs, donc si $n \geq n_0$,

$$u_n \geq \alpha u_{n-1} \geq \alpha^2 u_{n-2} \geq \cdots \geq \alpha^{n-n_0} u_{n_0},$$

donc $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est une série à termes positifs, minorée par

$\sum_{n\geq n_0} u_{n_0}\alpha^{n-n_0}$, qui est une série à termes positifs divergente (car $\alpha > 1$)

donc la série diverge. [les sommes partielles divergent vers $+\infty$)

2. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell < 1$ Soit $\alpha = \frac{\ell+1}{2} \in]\ell, 1[$. Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell < \alpha$,

il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq, si $n \geq n_0$, alors $\frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \alpha$, et comme

les termes sont strict. positifs, on a :

$$u_n \leq \alpha u_{n-1} \leq \cdots \leq \alpha^{n-n_0} u_{n_0}$$

et $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est une série à termes positifs majorée par $\sum_{n\geq n_0} u_{n_0}\alpha^{n-n_0}$,

qui est à termes positifs et convergente, donc $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge.

3 Cas $\ell = 1$: si $u_n = \frac{1}{n}$: $\sum \frac{1}{n}$ diverge et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$. !!

si $u_n = \frac{1}{n^2}$: $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$

$\boxed{\text{Ex8}}$ 1. $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ pour $n \geq 2$

On a $u_n \sim \frac{(-1)^n}{n}$ mais cela ne sert à rien car les

signes ne sont pas constants !! Par contre, on peut dire que

$\boxed{\text{TD30 p10}}$ $|u_n| \sim \frac{1}{n}$ et $\sum 1/n$ diverge et est à termes ≥ 0,

donc $\sum |u_n|$ diverge, ie $\boxed{\sum u_n \text{ n'est pas absolument convergente.}}$

Étudions la convergence : $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + t^2 \varepsilon(t)$ où $\varepsilon(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$

donc $u_n = \frac{(-1)^n}{n} \underbrace{- \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left((-1)^n/n\right)}_{v_n}$

$= \frac{(-1)^n}{n} + v_n.$

Or, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge (série spéciale alternée)

et $v_n \sim -\frac{1}{2n^2}$ donc $|v_n| \sim \frac{1}{2n^2}$ et $\sum \frac{1}{2n^2}$ converge

et est à termes positifs, donc $\sum v_n$ est absol. conv., donc convergente.

Par somme de séries convergentes, $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$

2. $u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$

Pour $n \geq 2$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{(-1)^n}{1 + (-1)^n n^{-1/2}}$

Or, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^2 \varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

donc $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left((-1)^n/\sqrt{n}\right)\right)$,

$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\left(1 + \varepsilon\left((-1)^n/\sqrt{n}\right)\right)}_{v_n}$

Or, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ conv. et $v_n \sim \frac{(-1)^n}{n^{3/2}}$ donc $|v_n| \sim \frac{1}{n^{3/2}}$

et $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est à termes ≥ 0 et converge (série de Riemann, $3/2 > 1$)

donc $\sum v_n$ est abs. conv., donc convergente.

TD30 p11 | Or, $\sum 1/n$ diverge, donc par somme d'une série convergente et d'une série divergente, $\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$

Rem : $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Pourtant, $\sum u_n$ diverge et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge !!

Ex 9 Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

On a : $S_n = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k)^2}$ (on ne garde que les carrés des impairs)

$$= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$$ (cf TD 29, ex 12 : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$)

donc $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$

Ex 10 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2e$$

donc $\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{n!}$ converge et $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} = 2e}$ (Rappel : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$)

2. Pour $n \geq 2$, on a : $\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2-2}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{k!}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{k!}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} + \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l!} - 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

TD30, p12

$$= \sum_{l=0}^{n-2} \frac{1}{l!} + \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l!} - 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e+e-2e=0$$

donc $\boxed{\sum \frac{n^2-2}{n!} \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!} = 0}$

Ex11 1. $0<a<1$. La f° $x \mapsto \frac{1}{x^a}$ est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$,

donc par la comparaison série - intégrale, on a :

$$\int_1^n \frac{dt}{t^a} + \frac{1}{n^a} \leq S_n \leq \int_1^n \frac{dt}{t^a} + \frac{1}{1^a}$$

donc $$\frac{n^{1-a}}{1-a} + \frac{1}{n^a} - \frac{1}{1-a} \leq S_n \leq \frac{n^{1-a}}{1-a} + 1 - \frac{1}{1-a}.$$

Or, $\left| \begin{array}{l} n^{1-a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \\ \frac{1}{n^a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{array} \right.$, donc $\boxed{S_n \sim \frac{n^{1-a}}{1-a}}$

2 $a>1$. On reprend la dém du cours : pour $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^a} \leq \frac{1}{k^a} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^a}$$

Fixons $n \geq 2$ et $N \geq n+1$.

Alors : $$\sum_{k=n+1}^{N} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^a} = \int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^a} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^a}$$
$$\leq \int_n^N \frac{dt}{t^a}$$

~~Alors~~ donc $$\frac{(N+1)^{1-a} - (n+1)^{1-a}}{1-a} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^a} \leq \frac{N^{1-a} - n^{1-a}}{1-a}.$$

En passant à la limite $N \to +\infty$: $\left(1-a<0 \text{ donc } N^{1-a} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0\right)$

TD30 p13

$$\boxed{\frac{1}{(a-1)(n+1)^{a-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{(a-1)n^{a-1}}}$$

et donc $\boxed{R_n \sim \frac{1}{(a-1)n^{a-1}}}$

$\boxed{\text{Ex 12}}$ On a $\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}\right| \sim \frac{1}{4n^2}$ donc $\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$ est

abs. conv.

Puis $\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1/2}{2n+1} - \frac{1/2}{2n+3}$ (DES)

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^{2n}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 x^{2n+2}\,dx$$

On en déduit que : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k+2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k\,dx$$

$$\overset{-x^2\neq 1}{=} \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,\frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(-x^2)^{n+1}(1-x^2)}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(-1+\frac{2}{1+x^2}\right)dx - \frac{1}{2}\int_0^1 (-x^2)^{n+1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)dx$$

TD30 p14

Or, $\int_0^1 \left(-1+\frac{2}{1+x^2}\right) dx = -1 + 2\arctan(1)$

$= \frac{\pi}{2} - 1$

et $\left|\int_0^1 (-x^2)^{n+1} \frac{1-x^2}{1+x^2} dx\right| \underset{pos}{\leq} \int_0^1 x^{2n+2} \underbrace{\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right|}_{\leq 1} dx$

$\leq \int_0^1 x^{2n+2} dx = \frac{1}{2n+3} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

et donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}$

Ex 13 Si $\alpha = 0$, $u_n = 0$ et la série converge.

Sinon : $u_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \left(1 - \left(\frac{\arctan(n)}{\pi/2}\right)^\alpha\right)$

$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \left(1 - \left(\frac{\pi/2 - \arctan(1/n)}{\pi/2}\right)^\alpha\right)$ ($\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$ si $x > 0$)

$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \left(1 - \left(1 - \frac{\arctan(1/n)}{\pi/2}\right)^\alpha\right)$

Or, $\arctan(x) = x - x^2 \varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

donc $u_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \left(1 - \left(1 - \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\varepsilon(1/n)\right)\right)^\alpha\right)$

$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \left(1 - \left(1 - \frac{2}{\pi n} + \underbrace{\frac{2}{\pi n^2}\varepsilon(1/n)}_{o(1/n^2)}\right)^\alpha\right)$

$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \left(1 - \left(1 - \frac{2}{\pi n} + o(1/n^2)\right)^\alpha\right)$

TD30 p15

Or, $(1+t)^\alpha = 1+\alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2 + o(t^2)$

donc par composée de $DL_2(0)$:

$$\left(1 - \frac{2}{\pi n} + o(1/n^2)\right)^\alpha$$

$$= 1 - \frac{2\alpha}{\pi n} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\left(-\frac{2}{\pi n}\right)^2 + o(1/n^2)$$

$$= 1 - \frac{2\alpha}{\pi n} + \frac{2\alpha(\alpha-1)}{\pi n^2} + o(1/n^2)$$

et $\boxed{u_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \left(\frac{2\alpha}{\pi n} - \frac{2\alpha(\alpha-1)}{\pi n^2} + o(1/n^2)\right)}$

Or, $\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \left(-\frac{2\alpha(\alpha-1)}{\pi n^2} + o(1/n^2)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

(si $\alpha=1$, pas d'$\sim$!!)

donc $\sum \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \left(-\frac{2\alpha(\alpha-1)}{\pi n^2} + o(1/n^2)\right)$ est abs. conv.

Mais $\sum \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \frac{2\alpha}{\pi n}$ est div,

donc par somme d'une série convergente et d'une série divergente,

$\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$

Rem : Plus rigoureusement, on aurait pu écrire :

$$(1+t)^\alpha = 1+\alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2 + o(t^2)$$

$$-\frac{\arctan|x|}{\pi/2} = -\frac{2}{\pi}x + o(x^2)$$

donc par composée de $DL_2(0)$, $\left(1 - \frac{\arctan|x|}{\pi/2}\right)^\alpha = 1 - \frac{2\alpha}{\pi}x + \frac{2\alpha(\alpha-1)}{\pi^2}x^2 + o(x^2)$

puis remplacer x par $1/n$.

TD30 p16 | Ex 14 On a :

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) = \sin\left(n\pi\sqrt{1+1/n^2}\right).$$

Or, $\sqrt{1+x} = 1+\frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$ ~~...~~

et $\sqrt{1+1/n^2} = 1 + \frac{1}{2n^2} + o(1/n^3)$.

donc $\sin\left(n\pi\sqrt{1+1/n^2}\right)$

$$= \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2n} + o(1/n^2)\right)$$

$$= (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n} + o(1/n^2)\right)$$

Or, $\sin(x) = x + o(x^2)$ donc par composée de

$DL_2(0)$: $\sin\left(\frac{\pi}{2n} + o(1/n^2)\right)$

$$= \frac{\pi}{2n} + o(1/n^2)$$

et $\boxed{u_n = \frac{(-1)^n\pi}{2n} + o(1/n^2)}$

Or, une série dont le terme g^al est $o(1/n^2)$ est abs conv.

De plus, $\sum \frac{(-1)^n\pi}{2n}$ est une série spéciale alternée, donc elle converge. Par somme de séries convergentes,

$\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$

TD30 p17 $\boxed{\text{Ex 15}}$ On a :

$$u_n = \ln(n) + a\ln(n(1+1/n)) + b\ln(n(1+2/n))$$
$$= (a+b+1)\ln(n) + a\ln(1+1/n) + b\ln(1+2/n)$$

Si $a+b+1 \neq 0$. $u_n \to \pm\infty$, et $\sum u_n$ est grossièrement div.

Si $a+b+1=0$: $u_n = a\ln(1+1/n) - (a+1)\ln(1+2/n)$

$$= a\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(1/n^2)\right) - (a+1)\left(\frac{2}{n} - \frac{4}{2n^2} + o(1/n^2)\right)$$

$$= -\frac{a+2}{n} + \frac{3a+4}{2n^2} + o(1/n^2)$$

$$= -\frac{a+2}{n} + v_n \quad \text{où } v_n = O(1/n^2),$$

donc $\sum v_n$ est abs conv.

- Si $a \neq -2$. $\sum \frac{a+2}{n}$ div, et $\sum u_n$ div. par somme d'une série div. et d'une série conv.

Si $a=-2$ et $a+b+1=0$, ie $b=1$: $u_n = v_n$, donc $\boxed{\sum u_n \text{ conv.}}$