TD27 p1

Ex 1 1. On a $P(X=1) = \frac{1}{6}$

$P(X=2) = P(X=3) = \frac{1}{3}$ (2 faces marquées 2 et 3)

$P(X=4) = \frac{1}{6}$

2. $E(X) = 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2) + 3 \times P(X=3) + 4 \times P(X=4)$

$= \boxed{\frac{5}{2}}$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ (Huygens)

Or, $E(X^2) = 1^2 \times P(X=1) + 2^2 \times P(X=2) + 3^2 P(X=3) + 4^2 P(X=4)$ (Formule de transfert)

$= \boxed{\frac{43}{6}}$

donc $\boxed{V(X) = \frac{11}{12}}$

3. Formule de transfert. $E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{1} P(X=1) + \frac{1}{2} P(X=2) + \frac{1}{3} P(X=3) + \frac{1}{4} P(X=4)$

$= \boxed{\frac{35}{72}}$

$E(\ln(X)) = \ln(1) P(X=1) + \ln(2) P(X=2) + \ln(3) P(X=3) + \ln(4) P(X=4)$

$= \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{1}{3}\ln(3) + 2\ln(2) \times \frac{1}{6} = \boxed{\frac{2\ln(2) + \ln(3)}{3}}$

Ex 2 L'univers Ω est l'ens. des combinaisons de 3 boules,

donc $\boxed{\mathrm{card}(\Omega) = \binom{10}{3} = 15 \times 8 = 120}$

$\boxed{X(\Omega) = \{3, 0, -3, -6\}}$ (Si par ex on tire 1 boule blanche et 2 noires, on gagne $1 + 2(-2) = -3$)

1. Loi de X : $(X=3)$ est l'ens. des tirages avec 3 boules blanches.

Donc $\mathrm{card}(X=3) = \binom{6}{3} =$

et $\boxed{P(X=3) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{6}}$

TD27 p 2

$(X=0)$ est l'ens. des tirages à 2 boules blanches et une boule noire.

On a $\binom{6}{2}$ choix pour 2 boules blanches

4 — pour 1 boule noire,

donc $\text{card}(X=0) = 4 \times \binom{6}{2}$

et $\boxed{P(X=0) = \frac{4\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{2}}$

$(X=-3)$ est l'ens. des tirages à 1 boule blanche et 2 boules noires.

On a 6 choix de boule blanche

$\binom{4}{2}$ ——— noires

et $\text{card}(X=-3) = 6 \times \binom{4}{2}$

et $\boxed{P(X=-3) = \frac{6 \times \binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}}$

$(X=-6)$ est l'ens. des tirages à 3 boules noires. Il y en a $\binom{4}{3}$ et $\boxed{P(X=-6) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{30}}$

(Rem : $(X=3) \cup (X=0) \cup (X=-3) \cup (X=-6)$ est l'univers tout entier, et ces évé sont 2 à 2 incompatibles, et on a bien $P(X=3) + P(X=0) + P(X=-3) + P(X=-6) = 1$).

et donc $E(X) = 3P(X=3) - 3P(X=-3) - 6P(X=-6)$

$= \boxed{-\frac{3}{5}}$

Ex3) Soit C_h la couronne de rayon h ($h = 1, .., 10$)

Elle a pour aire $\pi h^2 - \pi(h-1)^2 = \boxed{\pi(2h-1)}$

Pour $k = 1, ..., 10$, l'évé $(X=k)$ est " il atteint la couronne C_{11-k} " (10 pts pour C_1, .., 1 pt pour C_{10}).

TD 27 p3

La probabilité d'atteindre une couronne est proportionnelle à l'aire. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tq : $\forall k = 1, .., 10, \quad P(X=k) = \lambda \times \text{Aire}(C_{11-k})$

Or, $\text{Aire}(C_{11-k}) = \pi(2(11-k-1)) = \pi(21-2k)$

donc : $\boxed{\forall k = 1, .., 10, \quad P(X=k) = \lambda\pi(21-2k)}$

Mais $\sum_{k=1}^{10} P(X=k) = 1$ (le joueur atteint toujours la cible)

Or, $\sum_{k=1}^{10} P(X=k) = \lambda\pi \sum_{k=1}^{10}(21-2k)$

$= \lambda\pi \times 10 \times \frac{19+1}{2} = 100\pi\lambda$

donc $\boxed{\lambda = \frac{1}{100\pi}}$

d'où : $\boxed{\forall k = 1, .., 10, \quad P(X=k) = \frac{21-2k}{100}}$

2) $E(X) = \sum_{k=1}^{10} k\frac{(21-2k)}{100} = \frac{1}{100}\left(21\sum_{k=1}^{10} k - 2\sum_{k=1}^{10} k^2\right) = \frac{1}{100}\left(\frac{10\times 11}{2} - 2\times\frac{10\times 11\times 21}{6}\right) = \boxed{\frac{77}{20}}$

Soit G le gain de ce jeu (gain pour le joueur)

L'univers image $G(\Omega)$ est $\{-a, 6-a, 7-a, .., 10-a\}$

il touche C_k, $k \geq 6$ — touche C_5 — C_4 — ... — C_1.

Puis : $P(G = 11-k-a) = P(\underbrace{X = 11-k}_{\text{Proba de toucher } C_k\text{, ie d'avoir } 11-k \text{ pts.}}) = \boxed{\frac{2k-1}{100}} \quad (1 \leq k \leq 5)$

TD27 p4

et $P(G=-a) = \underbrace{\sum_{k=1}^{5} P(X=k)}_{\text{Probabilité de toucher } C_\ell \text{ avec } \ell \geq 6.} = \sum_{k=1}^{5} \frac{21-2k}{100}$

$= \frac{1}{100} \times 5 \times \frac{19+11}{2}$

$= \frac{5\times 15}{100} = \boxed{\frac{15}{20} = P(G=-a)}$

d'où l'espérance de G :

$$E(G) = -a \times \frac{15}{20} + \sum_{k=1}^{5} (11-k-a) \times \left(\frac{2k-1}{100}\right)$$

$$= -\frac{15a}{20} + \frac{1}{100} \sum_{k=1}^{5} (2k-1)(11-k-a)$$

et $\sum_{k=1}^{5} (2k-1)(11-k-a) = \sum_{k=1}^{5} \left((23-2a)k - 2k^2 + a - 11\right)$

$= (23-2a) \times \frac{5\times 6}{2} - 2 \times \frac{5\times 6\times 11}{6} + 5a - 55$

$= 23\times 15 - 110 - 25a - 55 = 180 - 25a$

donc $E(G) = \frac{180}{100} - \frac{15a}{20} - \frac{25}{100} a$

$= \frac{18}{10} - a$

et le jeu est favorable au propriétaire si $E(G) < 0$,

i.e. si $\boxed{a > 1€80.}$

TD27 p5 | L'univers Ω est ici l'ens. des n-arrangements de $[\![1,n]\!]$ et $\boxed{\mathrm{card}(\Omega) = n!}$
(on tire les n boules, et on compte combien sont dans l'ordre au début)

1. Pour $k = 1, \dots, n$, on va calculer $P(X \geq k)$

Étudions l'évé $(X \geq k)$: c'est l'ens. des tirages tq les k premiers numéros soient dans l'ordre.
Or, il y a $\binom{n}{k}$ sous-ens. de k numéros, et une seule façon de les mettre dans l'ordre. Les $(n-k)$ restants, on peut les ranger comme on veut : $(n-k)!$ façons : $\mathrm{card}(X \geq k) = \binom{n}{k}(n-k)!$

et $\boxed{P(X \geq k) = \dfrac{\binom{n}{k}(n-k)!}{n!} = \dfrac{1}{k!}}$

Or, $(X \geq n) = (X = n)$ donc $\boxed{P(X = n) = \dfrac{1}{n!}}$

Puis si $k \leq n-1$, alors $(X = k) = (X \geq k) \setminus (X \geq k+1)$

donc $P(X=k) = P(X \geq k) - P(X \geq k+1)$
$(\text{car } (X \geq k+1) \subset (X \geq k))$

et $\boxed{P(X = k) = \dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{(k+1)!} \quad \text{si } k \leq n-1}$

2. On a : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k \Big(P(X \geq k) - \underbrace{P(X \geq k+1)}_{=0 \text{ si } k=n} \Big)$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k P(X \geq k) - \sum_{k=1}^{n} k P(X \geq k+1)$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k P(X \geq k) - \sum_{k=1}^{n} (k+1) P(X \geq k+1) + \sum_{k=1}^{n} P(X \geq k+1)$

TD27p6

$\stackrel{\text{télesc.}}{=}$ $P(X\geq 1) - (n+1)\underbrace{P(X\geq n+1)}_{=0} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} P(X\geq k+1)}_{=0 \text{ si } k=n}$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(X\geq k)$$

et donc $\boxed{E(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}}$

Rem : $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$ et $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_n$ est strict. croissante

donc $\boxed{E(X) < e-1}$

et $\boxed{E(X) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e-1}$

Ex 5 1. Soit N le nb de pas vers le nord.

Alors $\boxed{N \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)}$ (puisque chaque pas est un évé de Bernoulli de par. p, et ils sont mut. ind.) (pour n pas en tout).

Pour $n=60$: Il se retrouve à l'origine si $N=30$.

Or, $N\hookrightarrow \mathcal{B}(60,p)$ et $\boxed{P(X=30) = \binom{60}{30} p^{30}(1-p)^{30}.}$

2. On a $X_n = N - \underbrace{(n-N)}_{\text{nb de pas vers le Sud}} = 2N-n$

et $E(X_n) = 2E(X) - n$ (linéarité de l'espérance)

TD27 p7

et $E(X) = np$ (loi binomiale)

donc $\boxed{E(X_n) = n(2p-1)}$

Ex 6 Il est plus simple de modéliser en disant qu'on a une suite de n lapins, et on cherche la probabilité que le lapin noir soit à une place $k \in [\![1, n]\!]$.

Toutes les places sont équiprobables, donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])}$

et $\boxed{E(X) = \frac{n+1}{2}}$ et $\boxed{V(X) = \frac{n^2-1}{12}}$

Ex 7 1. L'univers image de Y est $[\![1, n]\!]$ ($P(Y=0)=0$ on peut dire aussi)

Puis : pour $k \in [\![1, n]\!]$:

$$P(Y=k) = \sum_{i=0}^{n} P(Y=k \mid X=i)\, P(X=i)$$

($(X=i)_{0 \leq i \leq n}$ est un sce et probas totales)

Mais $P(Y=k \mid X=i) = 0$ si $i \neq 0, k$,

donc $P(Y=k) = P(Y=k \mid X=k)\, P(X=k) + P(Y=k \mid X=0)\, P(X=0)$

Or : • $P(X=0) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n = (1-p)^n$

• $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $\quad X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

Puis • $P(Y=k \mid X=k) = 1$ (tout marche bien lorsque Y doit renvoyer $k \geq 1$)

• $P(Y=k \mid X=0) = \frac{1}{n}$ (lorsque $X=0$, Y renvoie une valeur au hasard entre 1 et n)

TD 27 p8

donc $\boxed{P(Y=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \frac{(1-p)^n}{n} \quad (1 \leq k \leq n)}$

Mais attention : $Y \neq X + \frac{(1-p)^n}{n}$

On a : $E(Y) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{E(X) = np} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k(1-p)^n}{n}$.

$= np + \frac{(1-p)^n}{n} \times \frac{n(n+1)}{2}$

et $\boxed{E(Y) = np + \frac{(1-p)^n (n+1)}{2}}$

Ex 8 Soit X la v.a.r. qui compte le nb de fois qu'il appelle.

Soit X_n la var. de Bernoulli qui vaut 1 s'il appelle le jour n.

Alors : $\boxed{X = \sum_{k=1}^{30} X_k}$ et $\boxed{E(X) = \sum_{k=1}^{30} E(X_k)}$

Soit $p_n = P(X_n = 1)$.

Alors : $p_{n+1} = P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1) P(X_n = 1) + P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0) P(X_n = 0)$

$= \boxed{-\frac{p_n}{4} + \frac{3}{4} = p_{n+1}}$

donc (p_n) est une suite arith. géo etc...

TD27 p9

et après calculs habituels :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ p_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}} \quad (p_1 = 1)$$

On en déduit $E(X_n) = p_n$

$$\text{et} \quad E(X) = \sum_{k=1}^{30} p_k = \frac{90}{5} + \frac{2}{5}\sum_{k=1}^{30}\left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$

$$= 18 + \frac{2}{5}\,\frac{1-(-1/4)^{30}}{1-(-1/4)}$$

$$= \boxed{18 + \frac{8}{25}\left(1 - \frac{1}{4^{30}}\right)}$$

et $\boxed{18 < E(X) < 19}$

Ex 9 Par Bienaymé - Tchebychev :

$$P(|X - E(X)| \geq 50) \leq \frac{V(X)}{50^2}$$

Mais $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1000, 1/2)$ (1000 lancers mut. ind. de même pa. 1/2)

donc $E(X) = 500$

$V(X) = 1000 \times \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{2}) = 250.$

$$\text{donc} \quad P(|X-500| \geq 50) = P(|X - E(X)| \geq 50)$$

$$\leq \frac{V(X)}{50^2} = \frac{50 \times 5}{50^2} = \frac{1}{10}$$

donc $\boxed{P(|X-500| \geq 50) \leq \frac{1}{10}}$

TD27 p10 / Ex 10

1. $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(3, 1/2)}$ (3 épreuves de Bernoulli mut. ind. de même par. $\frac{1}{2}$)

2. On a autant de chance d'avoir 0, 1 ou 2 bosses, donc

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0,2]\!])}$$

3. Chaque cravate a une chance sur 3 d'être dans le 1er tiroir. C'est donc une suite de 20 ép. de Ber. de même par. $1/3$, et mut. ind. : $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(20, 1/3)}$

4. X est la position de l'excuse dans un tas de 78 cartes.

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,78]\!])}$$

5. (i) $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(1-p)}$

(ii) $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(100, 1-p)}$ (100 ép. de Ber. mut. ind. de même par. $1-p$).

Ex 11 : L'univers image est $[\![0, 6]\!]$.

Pour $k \in [\![0,6]\!]$, $(X=k)$ a pour cardinal

$$\underbrace{\binom{6}{k}}_{\text{choix des } k \text{ lapins roses}} \times \underbrace{\binom{19-6}{10-k}}_{\text{choix des } 10-k \text{ autres.}}$$ (19 lapins en tout)

Or, il y a $\binom{19}{10}$ tirages possibles donc

$$\boxed{P(X=k) = \frac{\binom{6}{k}\binom{13}{10-k}}{\binom{19}{10}}}$$

TD27 p11 | Ex12

1. Chaque personne qu'il rencontre a une proba p d'être malade, et ce sont des évé mut. ind :

$$\boxed{N \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)}$$

2. On va déterminer la proba. qu'il ne soit pas malade à la fin :

$$P(\bar{M}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{probas totales}}}{=} \sum_{k=0}^{n} P(\bar{M} \mid N=k)\,P(N=k) \qquad \left(\left((N=k)\right)_{0\leq k\leq n} \text{ scc}\right)$$

Or, $P(\bar{M} \mid N=k) = \left(\frac{1}{3}\right)^k$ (car les événements "il reste sain après avoir rencontré une personne malade" sont mut. ind)

donc $P(\bar{M}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{p}{3}\right)^k(1-p)^{n-k} = \left(\frac{p}{3}+1-p\right)^n$$

$$= \left(\frac{1-2p}{3}\right)^n$$

et $\boxed{P(M) = 1 - P(\bar{M}) = 1 - \left(\frac{1-2p}{3}\right)^n}$

TD27 p20 | Ex 17 |

1. Univers image de Y : $Y(\Omega) = \{(0-1)^2, (1-1)^2, (2-1)^2, (3-1)^2\}$

$= \{0, 1, 4\}$.

Puis, pour $i \in [\![0,3]\!]$ et $j \in \{0,1,4\}$ on a

$$(X=i, Y=j) = (X=i, (X-1)^2=j)$$

donc $P(X=i, Y=j) = P((X-1)^2=j \mid X=i)\, P(X=i)$ car $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0,3]\!])$

$= \frac{1}{4} P((X-1)^2=j \mid X=i)$

$= \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq (i-1)^2 \\ \frac{1}{4} & \text{sinon } (P((X-1)^2=j \mid X=i) = 1 \text{ si } (i-1)^2=j \end{cases}$

d'où le tableau :

X \ Y	0	1	4	loi de X
0	1	1/4	0	1/4
1	1/4	0	0	1/4
2	0	1/4	0	1/4
3	0	0	1/4	1/4
loi de Y	1/4	1/2	1/4	

2. On a : $\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Or $\boxed{E(X) = \frac{3}{2}}$ (car $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0,3]\!])$)

Puis $E(Y) = 0 \times P(Y=0) + 1 \times P(Y=1) + 4\, P(Y=4)$

TD27 p21 | **Enfin :**

$$E(XY) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0,1,4} ij\, P(X=i, Y=j) \quad \text{(formule de transfert)}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1,4} ij\, P(X=i, Y=j)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \left(i P(X=i, Y=1) + 4i\, P(X=i, Y=4) \right)$$

$$= 2 P(X=2, Y=1) + 4\times 3\, P(X=3, Y=4)$$

$$= 2\times\frac{1}{4} + 12\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2} + 3 = \boxed{\frac{7}{2} = E(XY)}$$

d'où $\boxed{\operatorname{cov}(X,Y) = \frac{5}{4}}$ et $\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont dépendants}}$

$\boxed{\text{Ex 19}}$ 1. Ici, l'univers image est $Y(\Omega) = \{0,1\}$

donc Y est une var. de Bernoulli. Plus précisément,

$Y = \mathbb{1}_A$ où $A = (Y=1) = (X=-1) \cup (X=1)$ évts incompatibles

Or, $P(A) = P(X=-1) + P(X=1)$

$= \frac{2}{3}$ $\left(X \hookrightarrow \mathcal{U}(⟦-1,1⟧) \right)$

donc $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{B}(2/3)}$ donc $\boxed{P(Y=1) = \frac{2}{3}}$ $\boxed{P(Y=0) = \frac{1}{3}}$

Loi conjointe : Pour $i \in ⟦-1,1⟧$ et $j = 0,1$, on a :

TD 27 p.22

$$P(X=i, Y=j) = P(X=i, X^2=j) = P(X^2=j \mid X=i)\, P(X=i)$$

$$= \frac{1}{3} P(X^2=j \mid X=i) \quad \text{car } X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![-1,1]\!])$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } i^2 \neq j \\ \frac{1}{3} & \text{si } i^2 = j \text{ car } \underset{\text{si } i^2=j}{P(X^2=j \mid X=i) = 1} \end{cases}$$

d'où :

X \ Y	0	1	Loi de X
-1	0	1/3	1/3
0	1/3	0	1/3
1	0	1/3	1/3
Loi de Y	1/3	2/3	

2. On a $\boxed{E(X) = \frac{-1+1}{2} = 0}$ $\left(X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![-1,1]\!]) \right)$

Puis : $E(XY) = \sum_{i=-1}^{1} \sum_{j=0}^{1} ij\, P(X=i, Y=j)$

$$= \sum_{i=-1}^{1} i\, P(X=i, Y=1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

donc $\boxed{\mathrm{cov}(X,Y) = 0}$

Mais : $P(X=-1, Y=0) = 0 \neq P(X=-1)\, P(Y=0) \left(= \frac{1}{9} \right)$ (Toujours la même astuce en haut $P(X=\ldots, Y=\ldots) = 0$)

donc $\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont dépendants}}$

(encore une fois : $\mathrm{cov}(X,Y) = 0 \not\Rightarrow X, Y$ ind)

TD 27 p23 | Ex 20 | $T(\Omega) = [\![0, 2n]\!]$ $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$
$X(\Omega) = [\![-n, n]\!]$ $Z(\Omega) = [\![-n, n]\!]$

1. Il semble clair que X et T sont dépendantes et X et Y indépendantes.

Prouvons-le.

On a : $P(X=i, T=j) = P(T=i+n, T=j) = 0$ si $j \neq i+n$

Mais $P(T=i+n)P(T=j) \neq 0$ (car T est une loi binomiale, aucune prob. est nulle)

donc par ex. $P(X=0, T=0) \neq P(X=0)P(T=0)$

$\leadsto$ $\boxed{X \text{ et } T \text{ sont dépendantes.}}$

Puis : si $i \in [\![-n, n]\!]$ et $j \in \{-1, 1\}$

$$P(X=i, Y=j) = P(T=i+n, Y=j) \quad \text{\} } T, Y \text{ ind}$$

$$= P(T=i+n)P(Y=j)$$

$$= P(X=i)P(Y=j)$$

donc $\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont ind.}}$

2. Comme $X(\Omega) = [\![-n, n]\!]$ et $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$,

on a $\boxed{Z(\Omega) = [\![-n, n]\!]}$

Loi de Z : Soit $k \in [\![-n, n]\!]$ Alors :

TD27 p 24 | Comme $((Y=1),(Y=-1))$ est un sce,

par les probas totales :

$$P(Z=k) = P(Z=k, Y=1) + P(Z=k, Y=-1)$$

$$= P(XY=k, Y=1) + P(XY=k, Y=-1)$$

$$= P(X=k, Y=1) + P(X=-k, Y=-1) \quad \Big\downarrow \ X, Y \text{ ind.}$$

$$= P(X=k)P(Y=1) + P(X=-k)P(Y=-1)$$

$$= pP(X=k) + (1-p)P(X=-k)$$

$$= pP(T=k+n) + (1-p)P(T=n-k)$$

$$= p\binom{2n}{n+k}\frac{1}{2^{k+n}}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{2n-(k+n)} + (1-p)\binom{2n}{n-k}\frac{1}{2^{n-k}}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{2n-(n-k)}$$

$(T \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, 1/2))$

$$= p\binom{2n}{n+k}\frac{1}{2^{2n}} + (1-p)\binom{2n}{n-k}\frac{1}{2^{2n}} \quad \Big\downarrow \ \binom{2n}{n+k} = \binom{2n}{n-k}$$

$$= \boxed{\frac{\binom{2n}{n+k}}{2^{2n}} = P(Z=k)}$$

3. On a $P(X=k) = P(T=k+n) = \dfrac{\binom{2n}{n+k}}{2^{2n}}$ car $T \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, 1/2)$

$$= P(Z=k)$$

4. Probablement pas ! Prouvons-le :

$P(X=0, Z=1) = P(X=0, XY=1) = 0.$ (toujours la même astuce)

$\boxed{\text{TD 27 p25}}$

Mais $P(X=0)\neq 0$ $\left(P(X=0)=\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\right)$

$P(Z=1)\neq 0$ $\left(P(Z=1)=\frac{\binom{2n}{n+1}}{2^{2n}}\right)$

donc $P(X=0,Z=1)\neq P(X=0)\,P(Z=1)$

et $\boxed{X \text{ et } Z \text{ sont dépendantes}}$

5. Comme X et Z ont même loi, elles ont même espérance :

$\boxed{E(Z)=E(X)}$

Or $X=T-n$, donc $\boxed{E(X)=E(T)-n}$ (linéarité de l'espérance)

Mais $T\sim\mathcal{B}(2n,\frac{1}{2})$, donc $\boxed{E(T)=n}$

donc $\boxed{E(X)=E(Z)=0}$

$\boxed{\text{Ex 21}}$ Un peu de dénombrement !!

Ici, l'univers est l'ensemble des n-arrangements de $[\![1,n]\!]$. Il y en a $n!$

1. Déterminons le nb de tirages favorables

On choisit le rang d'apparition de 1 : $n-2$ possibilités (entre 1 et $n-2$)

Pour 2 et 3 : pas le choix, ils arrivent derniers !!

Les autres numéros : il reste $n-3$ places : $(n-3)!$ choix possibles.

La proba cherchée est donc $\frac{(n-2)\times(n-3)!}{n!}=\boxed{\frac{1}{n(n-1)}}$

TD27 p26 | 2. Ici, on choisit les 3 positions des boules 1, 2 et 3 : $\binom{n}{3}$ choix.

Puis les autres boules il y a $(n-3)!$ choix.

La proba cherchée est $\dfrac{(n-3)!\binom{n}{3}}{n!} = \boxed{\dfrac{1}{6}}$

3. X_n est le rang de sortie de la 3ème des boules 1, 2 et 3. Donc $\boxed{X_n(\Omega) = [\![3, n]\!]}$

Soit $k \in [\![3, n]\!]$. Alors :

$(X_n = k)$ est l'évé "au rang k sort la 3ème boule 1, 2 ou 3"

. Il faut choisir les 2 autres places de sortie, parmi les rangs 1 à $k-1$: $\binom{k-1}{2}$

. On peut permuter les 3 boules : $3! = 6$ possibilités

. Les autres boules : $(n-3)!$ possibilités.

Donc $P(X_n = k) = \dfrac{6\binom{k-1}{2}(n-3)!}{n!} = \boxed{\dfrac{3(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)}}$

Ex 23 | 1. Il s'agit de tirer $\{i, j\}$ dans un ensemble à $2n$ élts. $\binom{2n}{2}$ sous-ens à 2 élts, donc

$$P(X = i, Y = j) = \frac{1}{\binom{2n}{2}} = \frac{1}{n(2n-1)}$$

TD27 p27 | 2 On a donc

$$P(X=i, Y=j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq j \\ \frac{1}{n(2n-1)} & \text{si } 1 \leq i < j \leq 2n \end{cases}$$

Puis, par les probas totales, $(Y=j)_{1\leq j\leq 2n}$ est un sce, et

$$P(X=i) = \sum_{j=1}^{2n} P(X=i, Y=j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 2n \\ \sum_{j=i+1}^{2n} P(X=i, Y=j) = \boxed{\frac{2n-i}{n(2n-1)}} \end{cases}$$

donc : $\boxed{\forall i = 1, \dots, 2n, \quad P(X=i) = \frac{2n-i}{n(2n-1)}}$

Puis $P(Y=j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 1 \\ \underbrace{\sum_{i=1}^{2n} P(X=i, Y=j)}_{\text{Probas totales, th. 5.6}} = \sum_{i=1}^{j-1} P(X=i, Y=j) = \frac{j-1}{n(2n-1)} \end{cases}$

donc $\boxed{\forall j = 1, \dots, 2n, \quad P(Y=j) = \frac{j-1}{n(2n-1)}}$

Loi de $Y-X$: L'univers image est $(Y-X)(\Omega) = [\![1, 2n-1]\!]$ (écart min et max de l'apparition des 2 jokers)

Soit $k \in [\![1, 2n-1]\!]$ Alors

TD27 p28

$$(Y-X=k) = \bigcup_{i=1}^{2n-k} (X=i,\ Y=k+i)$$ (tous les cas où la dif. fait k)

et ces ens sont deux à deux incompatibles,

donc $$P(Y-X=k) = \sum_{i=1}^{2n-k} P(X=i,\ Y=k+i)$$ $k+i>i$

$$= (2n-k) \times \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{2n-k}{n(2n-1)}$$

donc $$\boxed{\forall k=1,\dots,2n-1,\quad P(Y-X=k) = \frac{2n-k}{n(2n-1)}}$$

donc $\boxed{X \text{ et } Y-X \text{ ont même loi}}$

2 On a : $$E(X) = \sum_{i=1}^{2n-1} i\,P(X=i) = \sum_{i=1}^{2n-1} \frac{i(2n-i)}{n(2n-1)}$$

$$= \frac{1}{n(2n-1)} \sum_{i=1}^{2n-1} (2ni - i^2) = \frac{1}{n(2n-1)} \left(2n \times \frac{(2n-1)(2n)}{2} - \frac{(2n-1)(2n)(2(2n-1)+1)}{6} \right)$$

$$= \frac{2n(2n-1)}{6n(2n-1)} \left(6n - (4n-1) \right) = \boxed{\frac{2n+1}{3} = E(X)}$$

4 Soit G le gain de la partie.

Alors $G = a - \underbrace{(Y-X-1)}$

a : si on retourne le 2e joker, on gagne a

$(Y-X-1)$: il y a $Y-X-1$ fois où le joueur paye 1€

TD27 p29

donc par linéarité de l'espérance

$$E(G) = a+1 - E(Y-X)$$ X et Y−X ont m̂ loi

$$= a+1 - E(X)$$

$$= a+1 - \frac{2n+1}{3}$$

et $E(G)=0 \iff a = \frac{2n+1}{3} - 1 = \frac{2n-2}{3}$

donc $\boxed{\text{la partie est équilibrée pour } a = \frac{2}{3}(n-1)}$

Ex24 1. Chaque candidat a une chance sur 3 d'être dans la salle S_i : X_i est donc la somme de n var de Ber. mut. ind de m̂ param 1/3.

$$\boxed{X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/3)}$$

2. $X_1 + X_2 + X_3 = n$ donc $\boxed{X_1 + X_2 = n - X_3}$

On a donc, pour $k \in [\![0; n]\!]$:

$$P(X_1 + X_2 = k) = P(n - X_3 = k)$$

$$= P(X_3 = n-k)$$

$$= \binom{n}{n-k} \frac{1}{3^{n-k}} \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{n-(n-k)}$$

$$= \boxed{\binom{n}{k} \frac{2^k}{3^n} = P(X_1 + X_2 = k)}$$

TD27 p30 Pui:

$$V(X_1+X_2) = V(n - X_3) = V(X_3) \quad \big\} \; X_3 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/3)$$

$$= n \times \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \boxed{\frac{2n}{9} = V(X_1+X_2)}$$

3. On a : $V(X_1+X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2\,\mathrm{cov}(X_1, X_2)$

donc $\mathrm{cov}(X_1, X_2) = \dfrac{V(X_1+X_2) - V(X_1) - V(X_2)}{2}$

$$= \frac{V(X_3) - V(X_1) - V(X_2)}{2} \quad \big\} \; V(X_i) = \frac{2n}{9}$$

$$= \boxed{-\frac{n}{9} = \mathrm{cov}(X_1, X_2)}$$

X_1 et X_2 varient dans le sens contraire. Plus X_1 est gd, plus X_2 est petit.

4. Toutes égales à $-n/9$

Ex 25 1. L'univers image est $Y_n(\Omega) = \{0, 1\}$: Y_n est une var. de Ber.

a) $P(Y_n = 1) = P(X_n X_{n+1} = 1) = P(X_n = 1, X_{n+1} = 1) \quad \big\}$ ind.

$$= P(X_n = 1)\,P(X_{n+1} = 1)$$

$$= p^2$$

donc $\boxed{Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p^2)}$ donc $\boxed{E(Y_n) = p^2}$ $\boxed{V(Y_n) = p^2(1-p^2)}$

TD27 p31 | 2. On cherche $P(Y_n=i, Y_{n+1}=j)$ pour $i,j=0,1$.

On a : (i) $P(Y_n=1, Y_{n+1}=1) = P(X_nX_{n+1}=1, X_{n+1}X_{n+2}=1)$
$= P(X_n=1, X_{n+1}=1, X_{n+2}=1)$ ind
$= P(X_n=1)P(X_{n+1}=1)P(X_{n+2}=1) = \boxed{p^3}$

(ii) $P(Y_n=1, Y_{n+1}=0) = P(X_nX_{n+1}=1, X_{n+1}X_{n+2}=0) = P(X_n=1, X_{n+1}=1, X_{n+2}=0)$
$\overset{\text{ind}}{=} P(X_n=1)P(X_{n+1}=1)P(X_{n+2}=0) = \boxed{p^2(1-p)}$

(iii) De m. $\boxed{P(Y_n=0, Y_{n+1}=1) = p^2(1-p).}$

(iv) Enfin, $P(Y_n=0, Y_{n+1}=0) = 1 - P(Y_n=1, Y_{n+1}=1) - P(Y_n=1, Y_{n+1}=0)$
$- P(Y_n=0, Y_{n+1}=1)$

$= \boxed{1+p^3-2p^2}$

(car $(Y_n=i, Y_{n+1}=j)_{0\le i,j\le 1}$ est un scc)

Puis. $\text{cov}(Y_n, Y_{n+1}) = E(Y_nY_{n+1}) - E(Y_n)E(Y_{n+1})$ 1°
$= E(X_nX_{n+1}^2X_{n+2}) - p^4$ $X_{n+1}^2 = X_{n+1}$
$= E(X_nX_{n+1}X_{n+2}) - p^4$ ind
$= E(X_n)E(X_{n+1})E(X_{n+2}) - p^4$
$= p^3 - p^4 = \boxed{p^3(1-p) = \text{cov}(Y_n, Y_{n+1})}$

donc, $\boxed{\text{si } p\neq 0,1 \;\; \text{cov}(Y_n, Y_{n+1}) \neq 0 \text{ et } Y_n\ Y_{n+1} \text{ sont dépendantes}}$

si $p=0$ ou $p=1$, alors les X_n sont des var constantes, égales entre elles, et les Y_n aussi. Elles sont donc indépendantes

TD27 p32 / 3. Soient $\underset{u,v}{i,j} = 0,1$. On a :

On peut remarquer que les couples (X_n, X_{n+1}) et (X_{n+k}, X_{n+k+1}) sont indépendants, car

$$P\big((X_n, X_{n+1}) = (i,j),\ (X_{n+k}, X_{n+k+1}) = (u,v)\big)$$

$$= P(X_n = i,\ X_{n+1} = j,\ X_{n+k} = u,\ X_{n+k+1} = v) \quad \} \text{ ind.}$$

$$= P(X_n = i)\,P(X_{n+1} = j)\,P(X_{n+k} = u)\,P(X_{n+k+1} = v) \quad \} \text{ ind}$$

$$= P\big((X_n = i), (X_{n+1} = j)\big)\,P\big((X_{n+k} = u), (X_{n+k+1} = v)\big)$$

$$= P\big(((X_n, X_{n+1}) = (i,j)), ((X_{n+k}, X_{n+k+1}) = (u,v))\big)$$

donc $\boxed{Y_n = X_n X_{n+1} \text{ et } Y_{n+k} = X_{n+k} X_{n+k+1} \text{ sont ind.}}$ (prop 6.4, image de va ind.)

donc $\boxed{P(Y_n = i, Y_{n+k} = j) = P(Y_n = i)\,P(Y_{n+k} = j)} = \dots$ comme !!

4. Par linéarité : $E(T_n) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = \boxed{np^2 = E(T_n)}$

Enfin : $V(T_n) = V\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \mathrm{cov}(Y_i, Y_j)$

Or $\boxed{V(Y_i) = p^2(1-p^2)}$ ($Y_i \sim \mathcal{B}(p^2)$)

et $\mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = 0$ si $|j-i| \ge 2$ (va ind)

donc $V(T_n) = np^2(1-p^2) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{cov}(Y_i, Y_{i+1})$

$= np^2(1-p^2) + 2p^3(1-p) = \boxed{p^2(1-p)(3np + n - 2p)}$

TD27 p33 | $\boxed{\text{Ex 26}}$

Soit $X_i = 1$ si on tire la boule blanche dans U_i, 0 sinon.

Alors $\boxed{X_i \hookrightarrow B\left(\frac{1}{i+1}\right)}$

et $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ donc $E(S) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} = E(S)}$

$\boxed{\text{Ex 27}}$ 1. On a $E(T_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{nm}{n} = \boxed{m = E(T_n)}$

Puis $V(T_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$ (va ind)

$= \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$

donc $\boxed{\sigma(T_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ et $\boxed{\sigma(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

Si on répète une infinité de fois des épreuves de même espérance, de même écart-type, mut ind, on approche de l'espérance.

2. On utilise B.T. : $P(|T_n - m| \geq \varepsilon)$

$= P(|T_n - E(T_n)| \geq \varepsilon)$

$\leq \frac{V(T_n)}{\varepsilon} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

TD 27 p 34 | $\boxed{\text{Ex 18}}$ 1. C'est une suite de n épreuves de Ber. mut. ind. de même paramètre p, donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)}$

2 a. Si l'événement $(X=k)$ est réalisé, comme dans 1, Y va suivre une loi binomiale de par. $n-k$, p :

$$\boxed{P(Y=j \mid X=k) = \binom{n-k}{j} p^j (1-p)^{n-k-j}}$$

b. On a $Z(\Omega) = [\![0,n]\!]$. Fixons $\ell \in [\![0,n]\!]$. Alors :

$$(Z=\ell) = \bigcup_{k=0}^{\ell} (X=k, Y=\ell-k)$$ et ces év. sont

2 à 2 incompatibles donc :

$$P(Z=\ell) = \sum_{k=0}^{\ell} P(X=k, Y=\ell-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\ell} P(Y=\ell-k \mid X=k)\, P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{n-k}{\ell-k} p^{\ell-k} (1-p)^{n-k-(\ell-k)} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \boxed{\sum_{k=0}^{\ell} \binom{n-k}{\ell-k}\binom{n}{k} p^{\ell} (1-p)^{2n-k-\ell}}$$

Or : $\binom{n-k}{\ell-k}\binom{n}{k} = \frac{(n-k)!}{(\ell-k)!(n-\ell)!}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\ell!}{(\ell-k)!k!} \times \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!}$

$$= \binom{\ell}{k}\binom{n}{\ell}$$

donc $P(Z=\ell) = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k}\binom{n}{\ell} p^{\ell}(1-p)^{2n-k-\ell} = p^{\ell}\binom{n}{\ell}\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}(1-p)^{2n-k-\ell}$

$$= p^{\ell}(1-p)^{2n-2\ell}\binom{n}{\ell}\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}(1-p)^{\ell-k}$$

TD 27 p 35

$= p^{\ell}(1-p)^{2n-2\ell}\binom{n}{\ell}(1+(1-p))^{\ell}$

$= \binom{n}{\ell}(p(2-p))^{\ell}((1-p)^2)^{n-\ell}$

Or, $1-(p(2-p)) = 1-2p+p^2 = (1-p)^2$

donc $\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p(2-p))}$

Ex 21 1. $\boxed{S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})}$ (n épr. de Ber. mut. ind. de même paramètre $1/2$)

2. On a $X_n = 2S_n + \underbrace{(n-S_n)}_{\text{nb de saut de 1 unité}} = \boxed{S_n + n = X_n}$

donc $E(X_n) = n + E(S_n) = n + \frac{n}{2} = \boxed{\frac{3n}{2} = E(X_n)}$

et $\boxed{V(X_n) = V(S_n) = \frac{n}{4}}$

3 (a) Il faut au maximum n sauts, et au minimum $\frac{n}{2}$, ie $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ (il faut un entier $\geq \frac{n}{2}$)

donc $\boxed{Y_n(\Omega) = [\![\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor, n]\!]}$

(b) $((X_1=1), (X_1=2))$ est un scc, donc par les probas totales, $P(Y_n=k) = P(Y_n=k \mid X_1=1)P(X_1=1) + P(Y_n=k \mid X_1=2) \times P(X_1=2)$

TD 27 p 36 | Or, $P(X_1=1) = P(X_1=2) = \frac{1}{2}$

et $P(Y_n = k \mid X_1 = 1) = P(Y_{n-1} = k-1)$

(car passer de l'origine à au moins l'abscisse n en k sauts, avec un 1er saut de 1, revient à passer de 1 à au moins n en $k-1$ sauts, ou encore de 0 à au moins $n-1$ en $k-1$ sauts)

et $P(Y_n = k \mid X_1 = 2) = P(Y_{n-2} = k-1)$ (m̂ argument)

donc $P(Y_n = k) = \frac{1}{2} P(Y_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2} P(Y_{n-2} = k-1)$

(c) On a : $E(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} k P(Y_n = k)$ (sachant que $P(Y_n = k) = 0$ si $k < \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$)

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} k P(\underbrace{Y_{n-1} = k-1}_{j = k-1}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} k P(Y_{n-2} = k-1)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) P(Y_{n-1} = j) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) P(Y_{n-2} = j)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} j P(Y_{n-1} = j) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} j P(Y_{n-2} = j) + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \left(P(Y_{n-1} = j) + P(Y_{n-2} = j) \right) \right)$$

Or : $\sum_{j=0}^{n-1} j P(Y_{n-1} = j) = E(Y_{n-1})$

$\sum_{j=0}^{n-1} j P(Y_{n-2} = j) = E(Y_{n-2})$ ($P(Y_{n-2} = n-1) = 0 \dots$)

TD27 p37

<u>Puis</u>: $\sum_{j=0}^{n-1} P(Y_{n-1}=j) = 1$

($(Y_{n-1}=j)_{0\le j\le n-1}$ est un scc)

et de m $\sum_{j=0}^{n-1} P(Y_{n-2}=j) = 1$

d'où la formule de l'énoncé.

(d) <u>On a</u>:

$$u_n + na = \frac{1}{2}\left(u_{n-1}+(n-1)a\right) + \frac{1}{2}\left(u_{n-2}+(n-2)a\right) + 1$$

$$= \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{2}u_{n-2} + na - \frac{3}{2}a + 1$$

donc si $\boxed{a = \frac{2}{3}}$:

$$\boxed{\forall n \geq 2, \quad u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{2}u_{n-2}}$$

<u>Equa. caract.</u>: $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$, racines 1 et $-\frac{1}{2}$

<u>donc</u> il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tq :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda \cdot 1^n + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \lambda + \frac{\mu}{(-2)^n}$$

<u>Or</u>: $Y_0 = 0$, $Y_1 = 1$ (va certes)

donc $E(Y_0) = 0$, $E(Y_1) = 1$

et $u_0 = 0$, $u_1 = 1 - a = \frac{1}{3}$

donc $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu/2 = \frac{1}{3} \end{cases}$ donc $\frac{3}{2}\mu = -\frac{1}{3}$ et $\mu = -\frac{2}{9}$, $\lambda = \frac{2}{9}$

<u>donc</u>: $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad E(Y_n) = \frac{2}{9} - \frac{2}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2n}{3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2n}{3}}$$

TD27 p38 | Ex 28

1. Comme $\lambda > 0$ et exp. est une f° croissante :

$$(S_n - np \geq nx) = (\lambda(S_n - np) \geq \lambda n x)$$

$$= \left(e^{\lambda(S_n - np)} \geq e^{\lambda n x} \right)$$

(égalité d'évé)

Or, $e^{\lambda(S_n - np)}$ est une var positive, donc par l'égalité de Markov,

$$P\left(e^{\lambda(S_n - np)} \geq e^{\lambda n x}\right) \leq \frac{E\left(e^{\lambda(S_n - np)}\right)}{e^{n\lambda x}}$$

2. On utilise la formule de transfert :

$$E\left(e^{\lambda(S_n - np)}\right) = \sum_{k=0}^{n} e^{\lambda(k - np)} P(S_n = k)$$

$$= e^{-\lambda n p} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^{\lambda})^k (1-p)^{n-k}$$

$$= e^{-\lambda n p} (pe^{\lambda} + 1 - p)^n$$

$$= \left(pe^{\lambda q} + q e^{-\lambda p}\right)^n.$$

3 On étudie $f(t) = (e^{t^2} + t) e^{-t}$

$$f'(t) = \Big[\underbrace{(2t-1)e^{t^2} + (1-t)}_{g(t)}\Big] e^{-t}$$

$g'(t) = 2(2t^2 - t + 1) e^{t^2} - 1.$

et $2t^2 - t + 1$ atteint son min. en $t = 1/4$, et il vaut $7/4$

donc $g'(t) \geq \frac{7}{4} - 1 > 0$, donc g est croissante, et $g(0) = 0$

$\boxed{\text{TD27p39}}$

d'où le tableau

t		0	
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

donc $\boxed{f(t) \geq 1}$

Or, $P(S_n - np \geq nx) \leq \dfrac{(pe^{\lambda q} + qe^{-\lambda p})^n}{e^{n\lambda x}}$ (1° et 2°)

Or : $\begin{cases} e^{\lambda q} \leq e^{\lambda^2 q^2} + \lambda q \\ e^{-\lambda p} \leq e^{\lambda^2 p^2} - \lambda p \end{cases}$ $\times p, q \geq 0$

donc $pe^{\lambda q} + qe^{-\lambda p} \leq pe^{\lambda^2 q^2} + qe^{\lambda^2 p^2}$

$$\underset{p^2, q^2 \leq 1}{\leq} pe^{\lambda^2} + qe^{\lambda^2} = e^{\lambda^2} \text{ car } p + q = 1.$$

Puis $t \mapsto t^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc

$$\boxed{P(S_n - np \geq nx) \leq \frac{(e^{\lambda^2})^n}{e^{n\lambda x}} = e^{n(\lambda^2 - \lambda x)}}$$

Cette inégalité est vraie pour tous $\lambda, x \in \mathbb{R}_+^*$.

Or, $\lambda^2 - \lambda x \leq -\dfrac{x^2}{4} \iff (x - 2\lambda)^2 \leq 0$

$\iff \lambda = \dfrac{x}{2}$

Avec $\lambda = \dfrac{x}{2}$: $\boxed{\forall x > 0,\ P(S_n - np \geq nx) \leq e^{-nx^2/4}}$

4. De même : $(S_n - np \leq -nx) = \left(e^{\lambda(np - S_n)} \geq e^{\lambda n x}\right)$

TD27 p40

Avec l'inégalité de Markov :

$$P(S_n - np \leq -nx) \leq \frac{E(e^{\lambda(np-S_n)})}{e^{\lambda n x}}$$

Puis $E(e^{\lambda(np-S_n)}) = (pe^{-\lambda q} + qe^{\lambda p})^n$

(on remplace λ par $-\lambda$ dans le calcul de 2, car le signe de λ n'intervient pas dans ce calcul)

Puis de même : $pe^{-\lambda q} + qe^{\lambda p} \leq e^{\lambda^2}$

donc $\boxed{P(S_n - np \leq -nx) \leq e^{n(\lambda^2 - \lambda x)} \underset{\lambda = x/2}{\leq} e^{-nx^2/4}}$

Enfin $\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq x\right) = \left(\frac{S_n}{n} - p \geq x\right) \cup \left(\frac{S_n}{n} - p \leq -x\right)$

$= (S_n - np \geq nx) \cup (S_n - np \leq -nx)$

les év. sont incompatibles, donc

$$\boxed{P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq x\right) = P(S_n - np \geq nx) + P(S_n - np \leq -nx) \leq 2e^{-nx^2/4}}$$

Rem. Par B.T., $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq x\right) \leq \frac{V(S_n/n)}{x^2} = \frac{p(1-p)}{nx^2} \leq \frac{1}{4nx^2}$

car $E(S_n/n) = p$, $V(S_n/n) = \frac{p(1-p)}{n}$

et $e^{-nx^2/4} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{4nx^2}\right)$: l'inégalité de Bernstein est meilleure.