

Corrigés planches INP : première série

INP • Planche A

■ Exercice majeur

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n(x) = \frac{\alpha^n}{n!} \cos(nx) \text{ puis } U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

- 1) Donner le DSE de \exp et son rayon de convergence.
- 2) Montrer que $U(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- 3) Montrer que U est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
(sans calculer U)
- 4) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad U(x) = \exp(\alpha \cos(x)) \cos(\alpha \sin(x)).$$

On pose : $V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$.

- 5) Montrer que V est définie sur \mathbb{R} et calculer V .

On pose : $I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) U(x) dx$.

- 6) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.
- 7) Calculer I_n .

■ Exercice mineur

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $M(z) = \begin{pmatrix} 0 & z & z \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- 1) Donner le polynôme caractéristique de $M(z)$.
- 2) Pour quelles valeurs de z la matrice $M(z)$ est-elle diagonalisable ?

INP • Planche B

■ Exercice majeur

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on pose

$$f^0 = \text{id}_E \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, f^k = f \circ f^{k-1}.$$

On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est un *endomorphisme cyclique* s'il existe $e_1 \in E$ tel que

$$(e_1, f(e_1), \dots, f^{n-1}(e_1)) \text{ est une base de } E.$$

- 1) On suppose ici que $n = 3$. On note \mathcal{B} une base de E . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

- a. Déterminer $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f^2)$.
 - b. En déduire que f est cyclique.
- 2) Dans cette question, on considère que $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et que :

$$f : P \mapsto P(X+1) - P(X).$$

- a. Soit $Q \in E$ tel que $\deg(Q) \geq 1$.
Montrer que : $\deg(f(Q)) = \deg(Q) - 1$.
En déduire que f n'est pas bijectif.
 - b. f est-il cyclique ?
Indication : calculer $\deg(f^j(X^{n-1}))$.
- 3) On suppose ici que $\text{Ker}(f^{n-1}) \neq E$ et que $\text{Ker}(f^n) = E$.
 - a. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$.
 - b. Montrer que f est cyclique.
 - 4) On suppose ici f cyclique.
Montrer que ses sous-espaces propres sont de dimension 1.
 - 5) On suppose ici f diagonalisable.
Montrer que f est cyclique *si et seulement si* ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

■ Exercice mineur

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout x réel, on pose :

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right).$$

- 1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} .
Sa somme est notée f .
- 2) Montrer que la fonction f est continue sur \mathbb{R} .

■ Exercice majeur

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha + \beta = \gamma$, $\beta \neq 0$,
 $\gamma \neq 0$,
 $\beta \neq -\gamma$.

- 1) Montrer que A est diagonalisable.
- 2) a. Déterminer χ_C en fonction de χ_A , et en déduire le spectre de C .
b. Mêmes questions pour B .
- 3) Montrer que si $X \in \text{Ker}(A)$, alors $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(B)$.
- 4) Montrer que $\dim(\text{Ker } B) \geq 2 \dim(\text{Ker } A)$.
- 5) Diagonaliser B dans le cas où $\alpha = -1$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$.

■ Exercice mineur

Soit $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 $x \mapsto \sin(nx) e^{-n^2 x^2}$

- 1) Convergence simple de $(f_n)_{n \geq 1}$?
- 2) Convergence uniforme de $(f_n)_{n \geq 1}$ sur $[\alpha, 1]$, où $0 < \alpha < 1$?
- 3) Même question sur $[0, 1]$.

■ Exercice majeur

Soit $\varphi_U : \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}[X]$,
 $P \mapsto P + P(a)U$,

où $a \in \mathbb{C}$ et U est un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$.

- 1) Montrer que φ_U est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.
- 2) a. Montrer que $\text{Ker}(\varphi_U) \subset \text{Vect}(U)$.
b. Montrer que :

$$U(a) = -1 \implies \text{Ker}(\varphi_U) = \text{Vect}(U)$$

et que :

$$U(a) \neq -1 \implies \text{Ker}(\varphi_U) = \{0\}.$$

3) a. Montrer que :

$$\varphi_U^2 - (2 + U(a)) \varphi_U + (1 + U(a)) \text{id}_{\mathbb{C}[X]} = 0.$$

b. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que φ_U soit un automorphisme. Préciser φ_U^{-1} .

4) On suppose $U(a) = -1$. Quelle est la nature de φ_U ? En déduire $\text{Im}(\varphi_U)$.

5) Résoudre dans $\mathbb{C}[X]$ l'équation $V = P + P(a)U$, d'inconnue P .

■ Exercice mineur

1) Pour tout $x \in]-1, 1[$, montrer que :

$$\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}.$$

2) Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2}.$$
