

Planches INP : deuxième série

INP • Planche E

■ Exercice majeur

- 1) Résoudre : $y'(x) + 2\pi x y(x) = 0$ et $y(0) = 1$.
- 2) On donne : $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
 - a. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $b_n : t \mapsto t^n \exp(-\pi t^2)$ est intégrable sur \mathbb{R} .
 - b. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} b_0(t) dt$.
- 3) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$B_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} b_n(t) \exp(2i\pi x t) dt.$$

Montrer que B_n est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

- 4) Montrer que : $B_0(x) = \exp(-\pi x^2)$.
- 5) Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions définies sur \mathbb{R} , de la forme :

$$x \mapsto P(x) \exp(-\pi x^2) \quad \text{où } P \in \mathbb{C}[X].$$

Montrer que toutes les fonctions B_n appartiennent à E .

■ Exercice mineur

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, A la matrice de E définie par :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{où } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

On pose $\varphi_A : E \rightarrow E, M \mapsto AM - MA$.

- 1) Déterminer $\text{Sp}(\varphi_A)$ et étudier la diagonalisabilité de φ_A .
- 2) Généraliser ces résultats au cas où A est une matrice diagonalisable d'ordre 2.
- 3) Traiter le cas où $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

INP • Planche F

■ Exercice majeur

Soit F l'ensemble des fonctions dérivables de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} telles que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) = f(\sqrt{x}).$$

Soit G l'ensemble des fonctions dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = e^t g\left(\frac{t}{2}\right).$$

- 1) Montrer que G est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
- 2) a. Soit $f \in F$. On pose $g : t \mapsto f(e^t)$.
Montrer que g appartient à G .
b. Soit $g \in G$. On pose $f : x \mapsto g(\ln x)$.
Montrer que f appartient à F .
- 3) Soit $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence infini et telle que $a_0 = 1$.

On suppose que $g : t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ appartient à G .

a. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{2^k} \frac{1}{(n-1-k)!}.$$

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leq \frac{2^n}{n!}$.

- 4) On admet que toutes les fonctions de G sont développables en série entière sur \mathbb{R} .
 - a. Montrer que $\dim(G) = 1$.
 - b. Qu'en déduit-on concernant F ?

■ Exercice mineur

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que

$$X \hookrightarrow \mathcal{P}(a) \quad \text{et} \quad Y \hookrightarrow \mathcal{P}(b).$$

- 1) Déterminer la loi de $X+Y$ de deux manières différentes.
- 2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de X conditionnellement à $[X+Y = n]$.
- 3) On suppose que $c > 0$ et $p \in [0, 1]$ sont deux constantes, X et Z deux variables aléatoires telles que $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(c)$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, conditionnellement à $[Z = n]$, X suit la loi binomiale de paramètres n et p .
Montrer que X et $Z-X$ sont indépendantes, et déterminer leurs lois.

■ Exercice majeur

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, on pose :

$$\|M\|_\infty = \max \{ |m_{i,j}| ; 1 \leq i, j \leq d \}.$$

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) La matrice A est-elle diagonalisable ?
- 2) On pose $N := A - I_3$.
Calculer N^2 , puis les autres puissances de N .
- 3) Déterminer la limite de $\|A^n\|_\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
- 4) Vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.
- 5) Pour tout couple (M, N) de matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, prouver la majoration :

$$\|MN\|_\infty \leq d \times \|M\|_\infty \times \|N\|_\infty.$$

- 6) On suppose que M est diagonalisable et possède au moins une valeur propre de module strictement supérieur à 1.
Déterminer la limite de $\|M^n\|_\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

■ Exercice mineur

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On pose :

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^{\pi/2} f(t)g(t)dt.$$

- 1) Montrer que E est un espace préhilbertien réel.
- 2) Calculer $\|\cos\|^2$.
- 3) Orthonormaliser la famille (\sin, \cos) .

■ Exercice majeur

- 1) On pose $P = X^2 - 2X + 1$ et $Q = P + P' + P''$.
Vérifier que la fonction P est positive sur \mathbb{R} et que Q y est strictement positive.
- 2) Soit $P \in \mathbb{R}_{2n}[X] \setminus \{0\}$. On suppose que la fonction P est positive sur \mathbb{R} et on pose :

$$Q = \sum_{k=0}^{2n} P^{(k)}.$$

- a. Exprimer Q' .
- b. À l'aide de la fonction $g : t \mapsto e^{-t}Q(t)$, montrer que la fonction Q est strictement positive sur \mathbb{R} .
- 3) Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$(P|Q) = \sum_{k=0}^{2n} (PQ)^{(k)}(0).$$

- a. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire.
 - b. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.
 - c. Calculer la distance de X^n à $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.
- Ce nombre est noté u_n .**
- 4) Étudier la nature de la série de terme général $(u_n)^{-1/n}$.
Pour cela, on donne le développement asymptotique :

$$\ln(n!) = n \ln(n) - n + o(n)_{n \rightarrow \infty}.$$

■ Exercice mineur

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer que A est semblable à une matrice diagonale D .
- 2) Déterminer une matrice B telle que $B^3 = A$.
- 3) Montrer que la matrice B trouvée à la question précédente est unique.

|