TD 30 exercice 6

$f : (x;y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{|x|+|y|} & \text{si } (x;y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

① la fonction f est-elle continue ?

La fonction f est continue si et seulement si elle est continue en tout point $(x_0;y_0)$ de $\mathbb{R}^2$.

Pour $(x_0;y_0) \neq (0;0)$

Par théorèmes opératoires, f est continue en $(x_0;y_0)$.

Pour $(x_0;y_0) = (0,0)$

aide à la majoration

Pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$ posons $x + iy = r e^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ (ainsi $|x+iy| = r = \|(x;y)\|$)

alors $|f(\underset{r\cos\theta}{\underset{\shortparallel}{x}};\underset{r\sin\theta}{\underset{\shortparallel}{y}}) - \underbrace{f(0,0)}_{=0}| = \left|\frac{\sin(r^2\cos\theta\sin\theta)}{r(|\cos\theta|+|\sin\theta|)}\right|$

$\leqslant \frac{|r^2\cos\theta\sin\theta|}{r(|\cos\theta|+|\sin\theta|)}$ (*)

preuve de l'inégalité $|\sin t| \leq |t|$ utilisable directement

(*) car $\varphi : t \in \mathbb{R} \longmapsto |t| - |\sin(t)|$ est paire
donc $\varphi(t) = \varphi(|t|)$ et $\varphi(t) = t - |\sin(t)| \geqslant t - \sin t = \Psi(t)$ pour tout t dans $\mathbb{R}_+$.
Comme Ψ est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ de dérivée $\Psi' : t \mapsto 1 - \cos t \geqslant 0$
Ψ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $\Psi(t) \geqslant \Psi(0) = 0 \;\forall t \in \mathbb{R}_+$
Ainsi $|t| - |\sin(t)| \geqslant 0$ ie $|\sin(t)| \leqslant |t| \;\forall t \in \mathbb{R}$

Ainsi $|f(x;y) - 0| \leqslant \frac{\overset{>0}{r}\overbrace{|\cos\theta|}^{\leq 1}\overbrace{|\sin\theta|}^{\leq 1}}{1 \times \underbrace{|\cos\theta| + |\sin\theta|}_{\geqslant |\cos\theta|^2 + |\sin\theta|^2 = 1} \times 1} \leqslant \frac{r}{1}$

donc

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists R_\varepsilon = \varepsilon > 0$ tq

$\forall (x;y) \in B_o((0;0); R_\varepsilon)$ (ie $\|(x;y) - (0;0)\| = r < R_\varepsilon$)

$|f(x;y) - \underbrace{f(0;0)}_{=0}| \leqslant r < R_\varepsilon \leqslant \varepsilon$

vrai pour $(x;y) = (0;0)$

On vient de montrer que f est continue en $(0;0)$.

conclusion : $\boxed{f \text{ est continue}}$

② f est-elle C^1 ?

• Fixons $y_0 \in \mathbb{R}$ non nul.
alors $f(\cdot, y_0) : x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x;y) = \dfrac{\sin(xy_0)}{|x| + |y_0|}$
est dérivable à droite et à gauche en 0 par théorèmes opératoires ($x \geq 0 \longmapsto \dfrac{\sin(xy_0)}{x+y_0}$ et $x \leq 0 \longmapsto \dfrac{\sin(xy_0)}{-x+y_0}$)

On calcule

$$(f(\cdot, y_0))'_g(0) = \frac{(\overbrace{\cos(0y_0)}^{=1} \times y_0)(-0+y_0) - \overbrace{\sin(0y_0)}^{=0} \times (-1)}{(-0+y_0)^2}$$

$$= \frac{y_0^2 + 0}{y_0^2}$$

$$= 1$$

$$(f(\cdot, y_0))'_d(0) = \frac{(\cos(0y_0) \times y_0)(0+y_0) - \sin(0y_0) \times (1)}{(0+y_0)^2}$$

$$= 1$$

donc $f(\cdot, y_0)$ est dérivable en 0 de dérivée 1
ainsi $\left| \dfrac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) \text{ existe et vaut } 1 \right.$ $(y_0 \neq 0)$

• Pour $y_0 = 0$, $f(\cdot, y_0) : x \in \mathbb{R} \longmapsto 0$ est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$ de dérivée nulle.
Donc $\left| \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0; 0) \text{ existe et vaut } 0 \text{ pour tout } x_0 \in \mathbb{R} \right.$

• On pourrait s'intéresser à $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ mais ce n'est pas utile.
On vient de voir que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, y_0)$ existe pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, \cdot) : y \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$
donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, \cdot)$ n'est pas continue en 0
→ on ne l'a pas vérifié
donc même si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existait en tout point de $\mathbb{R}^2$
elle ne pourrait pas être continue en $(0;0)$
donc $\boxed{f \text{ n'est pas } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$

TD 30 exercice 12

Montrer que $f : (x;y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xe^y + ye^x$ admet un unique point critique mais pas d'extremum sur $\mathbb{R}^2$.

• La fonction f est C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ par théorèmes opératoires.

Un point critique $(x_0;y_0) \in \mathbb{R}^2$ de f est un point $(x_0;y_0)$ où les dérivées partielles de f sont nulles.

On calcule :

$$\forall (x_0;y_0) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0) = e^{y_0} + y_0 e^{x_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0) = x_0 e^{y_0} + e^{x_0}$$

donc $(x_0;y_0)$ point critique de f

$$\iff$$

$$\begin{cases} e^{y_0} + y_0 e^{x_0} = 0 \\ x_0 e^{y_0} + e^{x_0} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \quad L_2 \leftarrow L_2 - x_0 L_1$$

$$\begin{cases} e^{y_0} + y_0 e^{x_0} = 0 \\ (1 - x_0 y_0) e^{x_0} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \quad \downarrow e^{x_0} \neq 0$$

$$\begin{cases} 1 = x_0 y_0 \\ e^{y_0} + y_0 e^{x_0} = 0 \end{cases}$$

$$\iff$$

$$\begin{cases} y_0 \neq 0 \\ x_0 = 1/y_0 \\ \underbrace{e^{y_0}}_{>0} + y_0 \underbrace{e^{1/y_0}}_{>0} = 0 \end{cases}$$

$$\iff$$

$$\begin{cases} y_0 < 0 \\ x_0 = 1/y_0 \\ g(y_0) = 0 \quad \text{où} \quad g : t \in \mathbb{R}_-^* \mapsto e^t + te^{1/t} \end{cases}$$

on essaie de résoudre efficacement

Etudions g qui est C^1 par théorèmes opératoires:

$$\forall t<0 \quad g'(t) = e^{t} + e^{1/t} + t\times\left(-\frac{1}{t^2}\right)e^{1/t}$$
$$= \underbrace{e^{t}}_{>0} + (1-\underbrace{\frac{1}{t}}_{\leq 0})\underbrace{e^{1/t}}_{\geq 0} > 0$$

d'où le tableau de variations

t	$-\infty$	0
$g'(t)$	$+\ (>0)$	||
g	$-\infty$ (*) $\nearrow$	1 (**) ||

$$g(t) = e^{t} + \frac{e^{1/t}}{1/t} \quad \forall t<0$$

(*) $e^{t} \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0$ $\quad e^{1/t} \xrightarrow[t\to-\infty]{} e^{0}=1$

(**) $\frac{e^{u}}{u} \xrightarrow[u\to-\infty]{} 0$ par croissances comparées

Comme g est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$, strictement croissante d'image $]-\infty;1[$ le théorème de la bijection monotone assure que g s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}_-^*$, c'est en -1 car $g(-1) = e^{-1} - 1\times e^{1/-1} = e^{-1} - e^{-1} = 0$.

$\boxed{\text{Finalement } f \text{ admet } (-1;-1) \text{ comme seul point critique}}$

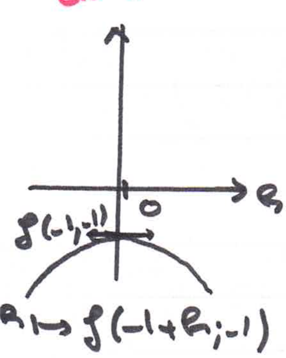
. On observe

$$f(-1+x;-1+y) = -e^{-1+y} + x e^{-1+y} - e^{-1+x} + y e^{-1+x}$$
$$= f(-1;-1) + e^{-1}(-e^{y} + x e^{y} - e^{x} + y e^{x} + 2)$$

d'où $f(-1+h,-1) - f(-1;-1) = e^{-1}(1+h-e^{h}) \underset{h\to0}{\sim} -\frac{e^{-1}}{2}\times h^2 < 0$

donc $f(-1+h;-1) - f(-1;-1) < 0$
$\exists \eta>0$ tq $\forall h\in[-\eta;\eta]\setminus\{0\}$

$\boxed{\text{donc } f \text{ n'a pas de maximum (local) en } (-1;-1)}$



On a aussi

$$f(-1+h;-1+h)-f(-1;-1) = 2e^{-1}(-e^{h}+he^{h}+1)$$
$$= 2e^{-1}\left(-1-h-\frac{h^2}{2}+h+h^2+1 \underset{h\to 0}{+o(h^2)}\right)$$
$$\underset{h\to 0}{\sim} 2e^{-1}\frac{h^2}{2} > 0$$

Donc $\exists \eta>0$ tq $\forall h\in]-\eta;\eta[\setminus\{0\}$
$$-f(-1;-1)+f(-1+h;-1+h)>0$$

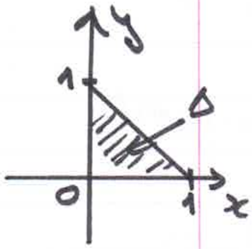
$\boxed{\text{donc } f \text{ ne présente pas de minimum (local) en } (-1;-1)}$

$\boxed{\text{Finalement } f \text{ n'a pas d'extremum (même local) en } (-1;-1)}$

Remarque : si on voulait juste vérifier que f n'a pas d'extremum (global), il suffit d'observer que $x\mapsto f(x,0)$ par exemple, prend des valeurs plus grandes strictement et plus petites que $f(-1;-1)$ donc c'est aussi le cas pour f.

TD 30 exercice 13 [indications]

$\max(\{xyz \mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0,\ x+y+z=1\})$



$$\mathcal{J} = \{xyz \mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0,\ x+y+z=1\}$$
$$= \{xy(1-x-y) \mid x>0,\ y>0,\ 1-x-y>0\} \cup \{0\}$$
$$= \{xy(1-x-y) \mid x\in]0;1[,\ y\in]0;1[\ \ x+y<1\} \cup \{0\}$$
$$= \{xy(1-x-y) \mid (x;y)\in\Delta\} \cup \{0\} \qquad (*)$$

$\Delta = \{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0,\ y>0,\ x+y<1\}$ ouvert

On observe $\mathcal{J}$ non vide inclus dans $[0,1]$
(car $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0,\ x+y+z=1) \Rightarrow (x,y,z)\in[0;1]^3$)
donc $\mathcal{J}$ admet une borne supérieure
avec $\sup(\mathcal{J}) \geqslant \left(\frac{1}{3}\right)^3$ car $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$ et $\frac{1}{3}\geqslant 0$
donc $\sup(\mathcal{J}) = \sup(\{f(x;y) \mid (x;y)\in\Delta\})$ via $(*)$
où $f : (x;y)\in\Delta \longmapsto xy(1-x-y)$

Il s'agit donc de chercher les points critiques de f (en faisant attention à rester dans Δ). Il y en a un seul.
Comme l'énoncé annonce un maximum, c'est sûrement l'image m par f du point critique. Donc on vérifie en calculant $f(x;y) - m \leqslant 0$ pour tout $(x;y)\in\Delta$ et on peut conclure.