

Programme de Colle numero 27

Intégration, application linéaires

Semaine du 25 mai 2026 :
 Analyse : Chapitre 11 : intégration
 Algèbre : chapitre 12 : applications linéaires, généralités
 Algèbre : chapitre 13 : application linéaire, dimension finie, matrice

? AUTO-TEST

Vous devez pouvoir répondre le plus précisément possible aux questions ci dessous.

► **AL12 : Applications linéaires : généralités**

- Qu'est-ce qu'une application linéaire ? Donnez des exemples.
- Qu'est ce qu'un endomorphisme ? Un isomorphisme ? un automorphisme ?
- Qu'est-ce qu'une forme linéaire ?
- Qu'est-ce que $\text{Ker } f$? $\text{im } f$?
- Quel lien entre Ker et l'injectivité ?
- Comment calculer $\text{im } f$ à partir d'une famille génératrice de E ?
- Qu'est qu'une projection ? Quelles caractéristiques ? Quelle caractérisation ?
- Qu'est qu'une symétrie ? Quelles caractéristiques ? Quelle caractérisation ?

► **AL13 : Applications linéaires en dimension finie, matrices**

- Expliquer comment le fait de donner l'image d'une base caractérise l'application linéaire.
- Qu'est ce que le rang ? Quel est l'effet d'une composition sur le rang ? Que dire du cas particulier de la composition par un isomorphisme ?
- Énoncer le théorème du rang. Idée de la preuve ?
- Quelles conséquences a la dimension finie sur l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité ? (plusieurs théorèmes...)
- Qu'est-ce qu'un hyperplan ? Quel lien avec les applications linéaires ?
- Qu'est-ce que l'équation d'un hyperplan ?
- Qu'est ce que la matrice d'une applications linéaires ? Pourquoi parle-t-on de deux bases ?
- Quelles correspondances entre opération sur les matrices et opération sur les applications linéaires ?
- Qu'est ce qu'une matrice de passage ?
- Donner les formules de changement de base, pour les vecteurs et pour les matrices d'applications linéaires.

► **AN11 : Intégration**

- Qu'est ce qu'une fonction en escalier ? Comment est définie l'intégrale d'une telle fonction ?
- Comment définit-on l'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$?
- Énoncer le théorème fondamental du calcul intégrale et donner l'idée de la preuve.
- Formule d'intégration par partie ?
- Formule de changement de variable ?
- Qu'appelle-t-on positivité de l'intégrale ? Et croissance de l'intégrale ?
- Que dire d'une fonction continue positive telle que $\int_{[a,b]} f = 0$?
- Qu'appelle-t-on somme de Riemann ? Énoncez le théorème de convergence des sommes de Riemann.

Cette liste de question n'est pas exhaustive, mais savoir y répondre précisément et rapidement est un bon indice de connaissance de votre cours.



COMPÉTENCES OU SAVOIRS-FAIRE

- ▶ Montrer qu'une application est linéaire et calculer son noyau et son image.
- ▶ Reconnaître une symétrie ou une projection, trouver ses éléments caractéristiques.
- ▶ REVISION : Calculer des intégrales via IPP, via des changements de variables (indiqués si pas évidents), via réduction en élément simple, etc.
- ▶ Utiliser le théorème de convergence des sommes de Riemann.
- ▶ Exploiter la croissance de l'intégrale pour obtenir des inégalités.
- ▶ Étudier, avec guide, des fonctions définies par des intégrales.



DEMONSTRATIONS EXIGIBLES

- ▶ Montrez que si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et G un sev de E . Alors $f(G)$ est un sous espace vectoriel de F .
- ▶ Montrez que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective si et seulement si $\text{Ker } f = \{0_E\}$.
- ▶ Parité et intégrale : donnez les formules et démontrez les.
- ▶ Montrez que si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim(E) = \dim(F)$, alors f injective ssi f surjective ssi f bijective.