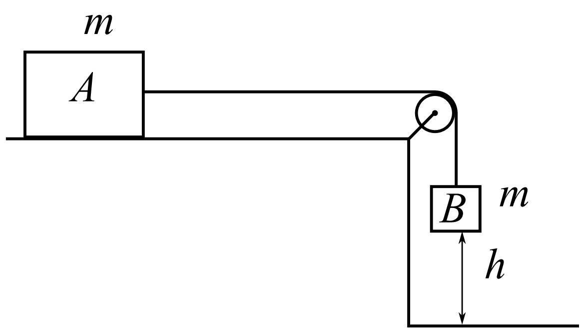
Mécanique du point et quantique

MEC-1: **Frottements solides (Mathilde ALLEMAND Mines-Ponts 2025**

Les deux objets, A et B, sont de même masse m.
On lâche le système sans vitesse initiale, B étant à une hauteur h par rapport au sol.
Une fois que B a atteint le sol, A continue de glisser, sur une distance d.
A glisse sur le plan horizontal, avec des frottements solides obéissant à la loi de Coulomb.
On néglige les frottements de l'air. La poulie est parfaite.
Exprimer le coefficient de frottement α intervenant dans la loi de Coulomb, en fonction des données.



MEC-2: **Sonde Cassini et atterrisseur Huygens (Aurèle DURAND CCINP 2025**

On considère un satellite en orbite autour d'une planète (Titan) de masse M supposée sphérique et de rayon R. Depuis ce satellite, situé à une distance d du centre de la planète, l'atterrisseur Huygens de masse m est lancé radialement (en direction du centre de la planète) avec une vitesse initiale de norme v_0 dans le référentiel de la planète. On néglige les frottements et l'influence de tout autre corps céleste.

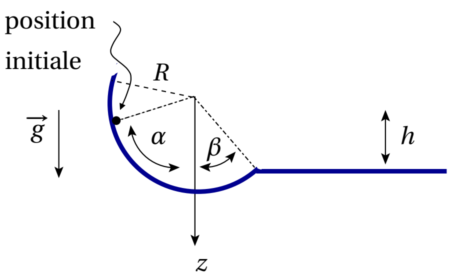
La constante gravitationnelle $G = 6.7\times10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
La masse de la planète $M = 1.34\times10^{23}\,\mathrm{kg}$
Le rayon de la planète $R = 2.6\times10^{3}\,\mathrm{km}$
La distance initiale entre Cassini et la surface de Titan $d = 6\times10^{4}\,\mathrm{km}$
La vitesse initiale de Huygens $v_0 = 100\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

1. Déterminer la vitesse de la sonde juste avant qu'elle n'atteigne la surface de la planète .

2. Etablir l'équation différentielle permettant de déterminer la durée mise par Huygens pour atteindre la surface de la planète depuis sa position initiale. On ne demande pas de la résoudre.

MEC-3: **Bille et gouttière (Alhassane BAH CCINP 2024, Pb Ouvert)**

On lâche la bille sphérique de masse m sur un tremplin circulaire de rayon R selon la position initiale représentée sur la figure, sans vitesse initiale. On note A le point de départ.



1. Déterminer la hauteur maximale atteinte par la bille.

2. Application numérique. On donne $R = 1.0\,\mathrm{m}$, $\alpha = \pi/2$ rad, $\beta = \pi/3$ rad.

3. La bille peut-elle franchir un mur de hauteur h situé à une distance horizontale a de l'extrémité du tremplin ? On donne $a = 50\,\mathrm{cm}$, $h = 30\,\mathrm{cm}$.

MEC-4: **Saut à l'élastique (Clément BALLAND CCINP 2024, Arthur VINCENOT CCINP 2018 Pb Ouvert)**

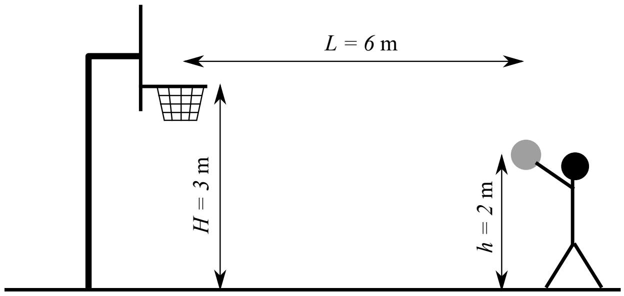
Une personne, attachée à un élastique, est lâchée depuis un pont de hauteur $H = 150$ m par rapport à l'eau d'une rivière. Évaluer la raideur de l'élastique modélisé comme un ressort pour que la personne puisse toucher l'eau avec ses mains lors de la chute. L'allongement maximal du ressort est de 200%.

MEC-5: **Le flipper (Emilie MOUGIN CCINP 2024, Alexandre HENRIOT CCP 2016), Pb ouvert**
Un « flipper » ou « billard électronique » est un jeu dans lequel on doit faire évoluer une boule d'acier au moyen de deux actionneurs, situés dans la partie basse du plateau. Ce dernier est incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Au début du jeu, il faut éjecter la boule en direction du plateau au moyen d'un « lanceur ». Celui-ci, placé à droite, dans la partie basse du plateau de jeu, est constitué d'un ressort et d'une tirette. La masse volumique de l'acier est $\rho = 8.0 \times 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. La boule a un rayon de $1.3\,\mathrm{cm}$.

La force maximale que l'on peut exercer sur la tirette du lanceur (et qui l'amène en butée) est $F_{max} = 5.0\,\mathrm{N}$. Elle correspond à l'image en haut à droite : "armé" (donc ici ressort armé au maximum). On fera l'approximation que la boule est en contact avec le ressort pendant toute la phase du lancer. On souhaite que la boule arrive en haut du plateau avec une vitesse minimale $v_{min} = 1.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Calculer la force à exercer sur le lanceur pour atteindre cet objectif.

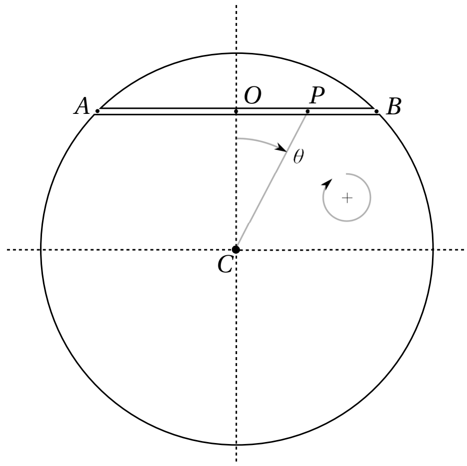
MEC-6: **Panier de basket à 3 points Simon JEHLE CCINP 2023)**

Le joueur est immobile et cherche à marquer un panier à 3 points. Les distances sont indiquées sur le schéma ci-contre. Chercher l'orientation du tir permettant au ballon de rentrer dans le panier avec la vitesse la plus petite possible en norme.



MEC-7: **Oscillations dans un tunnel creusé dans un astre (Solenn VIEILLE et Yannis PALMERO CCINP 2022, Sébastien MISSEY CCP 2018, Yvan FUCHS CCP 2017)**

On considère un astre de centre C, de masse M uniformément répartie et de rayon R. Un tunnel de rayon très petit devant R est percé, d'un point A à un point B, tous deux sur la surface de l'astre.
Données : Masse et rayon de l'astre : $M = 6.0 \times 10^{24}$ kg; $R = 6.4 \times 10^{3}$ km; constante gravitationnelle : $G = 6.7 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.



1. Donner les analogies entre gravitation et électrostatique.

2. On suppose que le champ gravitationnel est quasiment le même avec ou sans tunnel (R grand) ; trouver en tout point de l'astre le champ de gravitation.

3. On considère une masse ponctuelle m, située au point P, qui se déplace sans frottement à travers le tunnel en partant du point A avec une vitesse nulle. Trouver l'équation différentielle régissant ce mouvement et en déduire l'équation horaire du mouvement.

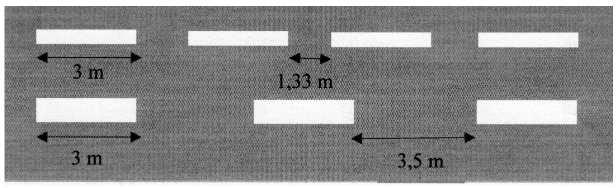
4. Déterminer la période T de parcours de la masse m dans le tunnel. Application numérique.

5. Soit un satellite en orbite circulaire à une altitude h négligeable devant R. Existe t-il une période telle que le satellite et la masse ponctuelle coïncident chaque fois au point A ? Si oui la déterminer.

MEC-8: **Freinage d'urgence d'une voiture (Thomas ZABE CCINP 2025, Hippolyte MONTAGNE CCINP 2021, Jeanne GUYOT et Caroline JANNIN CCP 2018 et écrit 2019 Pb Ouvert)**

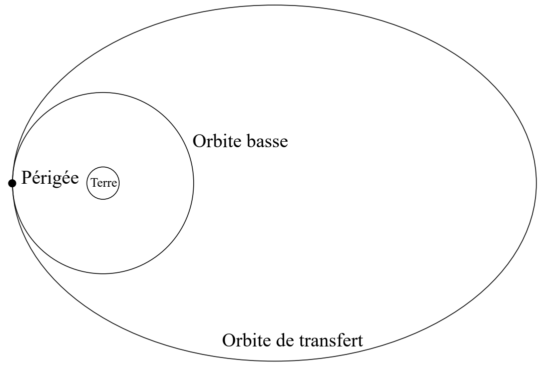
Les causes d'accidents de la route sont nombreuses et variées. Afin d'incriminer ou non un éventuel excès de vitesse lors de la sortie de route liée à un dépassement incontrôlé et décrite sur la photographie, on vous demande de déterminer l'expression littérale puis la valeur numérique de la vitesse du véhicule en début de phase de freinage. Toutes données pertinentes et nécessaires à la résolution de cette question pourront être introduite par le candidat. Les éléments légaux de marquage au sol sont représentés sur le dessin.

On rappelle qu'en cas de glissement, la réaction du sol sur un pneumatique est décrite par la loi de Coulomb, à savoir $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ avec $||\vec{T}|| = f\,||\vec{N}||$. $\vec{T}$ et $\vec{N}$ sont respectivement les composantes tangentielle et normale de la force $\vec{R}$ exercée par le support ; f est le coefficient de frottement solide entre les pneumatiques et le revêtement de la chaussée. Par temps sec, on a $f = 0,8$. Par temps humide, $f = 0,2$.



MEC-9: **Orbite de transfert satellite à réaction (LSL CCP 2018)**

Un satellite S a une trajectoire initiale (orbite basse) circulaire de rayon R_0 autour de la Terre. Sa masse initiale est $m_0 = 2100$ kg. Pour l'éloigner de la Terre, on le fait passer sur une orbite de transfert. Le passage de l'orbite basse vers l'orbite de transfert se fait en éjectant du gaz pendant une durée très brève, en un point P qui constituera le périgée de l'orbite elliptique de transfert. L'éjection de gaz se fait avec une vitesse de norme $u = 3,5$ km/s par rapport au satellite, supposée constante pendant toute l'éjection. Le débit massique, D_m, est également constant pendant toute l'éjection. Cette éjection de gaz permet à la norme de la vitesse du satellite, de passer de $v_0 = 7,8$ km/s à $v_1 = v_0 + \Delta v$, avec $\Delta v = 1,0$ km/s.
L'opération (assimilable à un choc) étant de durée très petite devant celle de parcours de la trajectoire, on peut négliger la force gravitationnelle, et supposer qu'au cours de cette opération, la vitesse du satellite ne change pas de direction.



1. Établir l'expression de la première vitesse cosmique (vitesse minimale de satellisation). Donner sa valeur numérique. On rappelle que le rayon moyen de la Terre est $R_T = 6,4 \cdot 10^3$ km.

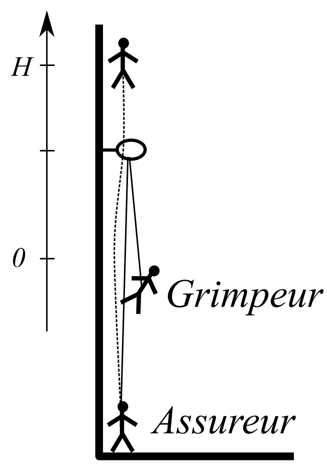
2. La valeur de v_0 est-elle compatible avec celle de la première vitesse cosmique?

3. Au moyen d'un bilan de quantité de mouvement, établir une équation différentielle liant, au périgée, la masse à la vitesse du satellite.

4. Déterminer la variation de masse du satellite lui permettant de passer de l'orbite basse à celle de transfert.

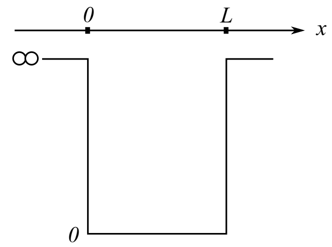
MEC-10: **Chute d'un grimpeur (Mathieu ROBERT Centrale 2023)**

Un grimpeur est relié à son "assureur" par une corde extensible, de masse linéique μ, et de longueur à vide L_0. Cette corde passe dans un crochet.
Le grimpeur tombe depuis une altitude H. La corde se tend quand il arrive à l'altitude 0.
On donne la loi de Hooke pour une corde extensible de longueur L : lorsqu'elle s'allonge de ΔL, elle est le siège d'une force de tension de norme $||\vec{F}|| = \frac{YS}{L}\Delta L$, Y étant le module d'Young de la corde.
Déterminer $||\vec{F}||_{max}$.



MEC-11: **Puits infini de potentiel quantique (Johan THIEBAUT CCINP 2021, Arthur PERRIN CCP 2017)**

On considère un puits quantique rectangulaire infini, s'étendant de $x = 0$ à $x = L$, dans lequel se trouve une particule de masse m.
On donne la fonction d'onde de la particule dans ce puits : $\psi(x,t) = A \ \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{i\omega t}$. On rappelle que la probabilité que la particule se trouve entre x et $x + \mathrm{d}x$ est $\mathrm{d}P = \left|\psi(x,t)\right|^2 \mathrm{d}x$.
La constante de Planck est $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J s.



1. Donner la probabilité de présence de la particule en $x = 0$ et en $x = L$.

2. En déduire l'expression de la longueur d'onde λ en introduisant un entier n.

3. Pour chaque n, exprimer l'énergie E_n de la particule en fonction de h, n, m et L.

4. Quels sont les différents niveaux d'énergie que la particule peut avoir et à quoi correspondent-ils?

5. Quelle est la plus petite fréquence de photon que la particule peut émettre ou absorber?

6. Déterminer A, puis représenter l'amplitude de la probabilité de présence en fonction de x, pour $n = 1$ puis pour $n = 2$.

MEC-12: **Couleur de la tomate, méca Q (Mélissa HENRIET CCP 2018)**

On explique la couleur d'une substance organique par la présence de "conjugaisons" au sein de la molécule. Cela se produit lorsque deux liaisons doubles sont séparées par une liaison simple. Les électrons de la liaison double sont alors "délocalisés" sur l'ensemble des trois liaisons. Et s'il y a alternance de liaisons simples et de liaisons doubles, les électrons sont délocalisés sur l'ensemble.

1. La molécule ci-dessous est le lycopène, responsable de la couleur de la tomate. Entourer la partie de la molécule sur laquelle il y a délocalisation des électrons.

On modélise un électron délocalisé, de masse $m_e = 9,11\cdot 10^{-31}$kg, comme une particule se déplaçant librement sur un segment entre les abscisses $x=0$ et $x=L$. Son énergie potentielle E_p est nulle sur ce segment et infinie en dehors. Sa fonction d'onde est $\psi(x,t) = A(x)\,e^{i\omega t}$. Elle est liée à son énergie E par l'équation $\dfrac{h^2}{8\pi^2 m_e}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + E\psi = 0$.

2. Résoudre cette équation et déterminer la forme générale de $A(x)$.

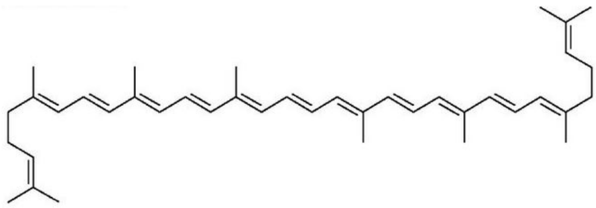
3. Quelles sont les conditions aux limites imposées pour $A(x)$ compte tenu du puits infini de potentiel ?

4. En déduire que l'énergie des électrons délocalisés est quantifiée et en donner l'expression. Quelle est l'énergie minimale ?

5. Retrouver cela par une analogie avec une corde fixée à ses deux extrémités.

6. On donne $L = 1,85$ nm et on rappelle que $h = 6,62\cdot 10^{-34}$ J.s.

La couleur de la tomate est liée à l'absorption d'un photon faisant passer un électron du niveau d'énergie E_{11} au niveau E_{12}. Montrer que ce modèle est cohérent.



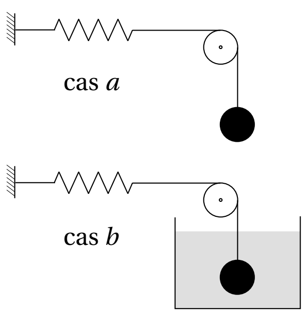
MEC-13: **Téléski (Alexandra PIOCH CCINP 2021, Guillaume VERRIER CCP 2017, Saad CHOUKRY CCP 2015), Pb ouvert**

On considère un téléski installé sur une pente enneigée. La piste du téléski mesure 200 m de long. Le dénivelé entre le point de départ et le point d'arrivée est de 60 m. Les perches, auxquelles sont accrochés les skieurs sont régulièrement réparties le long du câble tracteur, tous les 5 m. La vitesse du câble est constante et vaut $10\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. On admet que les frottements des skis sur la neige obéissent aux lois de Coulomb : $R_t = f R_n$ avec $f = 0,1$.

Évaluer la puissance que doit fournir le moteur électrique qui assure le déplacement du câble tracteur, et la puissance électrique consommée.

MEC-14: **Masse ressort avec ou sans frottements visqueux (Victor Guyot CCP 2017)**

On considère une bille de rayon R et de masse $m = 2.0000$ g, accrochée à un ressort par une corde inextensible passant sur une poulie. Une autre corde inextensible relie le ressort à un mur.
On suppose que la bille oscille librement lorsqu'elle est dans l'air (cas a) et qu'elle est soumise à la force de frottements $\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v}$ de la loi de Stockes lorsqu'elle oscille dans l'eau (cas b).
Dans le cas a, la bille oscille à la période $T = 1.0000$ s. Dans le cas b, elle oscille avec une pseudo-période $T' = 1.000\,15$ s.

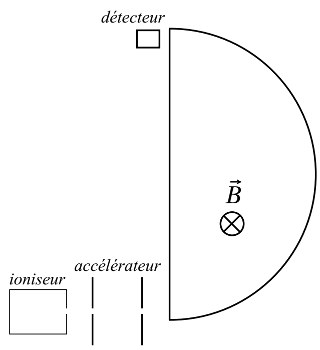


Déterminer le rayon R de la bille.

MEC-15: **Spectromètre pour séparation des isotopes du carbone (Matija MARINKOVIC CCP 2017)**

Spectromètre pour séparer l'isotope carbone 14 de l'isotope carbone 12.
On vaporise sous forme de gaz monoatomique un échantillon contenant les deux isotopes. Le mélange traverse ensuite un ioniseur qui arrache un électron à chaque atome de carbone. Les ions sont accélérés au moyen de deux plaques entre lesquelles la différence de potentiels est de 1.0 kV. Les ions qui sortent de l'accélérateur sont alors déviés par un champ magnétique $\vec{B}$ supposé uniforme.

Déterminer la valeur qu'il faut donner à la norme du champ magnétique pour que le spectromètre tienne sur une table et que les isotopes soient séparés.



MEC-16: **Camion sur route bosselée (Jules MARTI Mines 2016)**

Un camion roule sur une route avec des bosses. Le profil de la route est assimilé à une sinusoïde d'amplitude $\dfrac{H}{2}$ et de période L. Le camion est modélisé par un un point matériel M de masse m, et une roue sans masse, qui roule (sans frottements au niveau du moyeu) sur la route ; entre les deux, il y a un ressort sans masse, de raideur k. Le camion a une vitesse de composante horizontale v, constante.

1. Déterminer l'évolution de $h(t)$, altitude du point de contact entre la roue et le sol.

2. Déterminer l'évolution de l'altitude $y(t)$ du point M.

3. On tient compte à présent de l'amortisseur. Comment les résultats sont-ils modifiés ?

MEC-17: **Le lance-pierre (Olivier DAVID CCP 2015), Pb ouvert**

On modélise un lance-pierre par un ressort de raideur k.

Déterminer la vitesse à laquelle est éjectée une pierre de masse m lorsque l'on arme le lance-pierre avec une force de norme F.

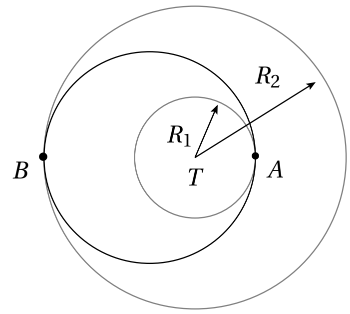
MEC-18: **Changement d'orbite**

Un satellite S a une trajectoire circulaire de rayon R_1 autour de la Terre.

1. Rappeler la définition du référentiel géocentrique. C'est dans ce référentiel qu'est étudié le mouvement du satellite.

2. Donner la relation entre sa période T de révolution autour de la Terre et le rayon de sa trajectoire.

3. Donner les expressions de $\mathscr{E}_c$, $\mathscr{E}_p$ et $\mathscr{E}_m$, respectivement énergie cinétique, potentielle et mécanique du satellite dans le référentiel géocentrique. Justifier le signe des énergies.



On désire faire passer S d'une orbite circulaire de rayon R_1 à une orbite circulaire de rayon $R_2 > R_1$ (voir la figure ci-contre), on utilise pour cela une orbite de transfert elliptique. Pour cela, on communique en A de l'énergie au satellite, sous forme d'énergie cinétique, soit $\Delta\mathscr{E}_A$ la quantité d'énergie apportée. Arrivé en B, on lui communique à nouveau une énergie $\Delta\mathscr{E}_B$.

4. On note α le rapport R_2/R_1 des rayons des orbites circulaires. Déterminer les variations **relatives** d'énergie mécanique en A et en B en fonction de α. Déterminer le rapport T_2/T_1 des périodes des mouvements circulaires en fonction de α. Enfin, déterminer la durée du transfert entre A et B.

MEC-19: **Satellite et frottements (André PEDROSA Centrale 2015), sans préparation**

Pour mettre un satellite en orbite géostationnaire, on le met d'abord sur une orbite d'attente à une altitude de 200 km. Puis, avec une trajectoire elliptique, on le place sur l'orbite géostationnaire.

1. Établir l'expression de l'altitude d'une orbite géostationnaire. Application numérique.

2. Lorsque le satellite est sur son orbite d'attente, on suppose qu'il subit une force de frottements due à la faible mais non nulle densité de particules qui y règne. Quel modèle choisir pour cette force de frottements visqueux : une force en v ou en v^2 ? Justifier.

3. Montrer que lors de cette phase d'attente, la norme du moment cinétique du satellite diminue et donner l'expression puis la valeur numérique du temps caractéristique de cette diminution. Commenter.

Données

- Constante gravitationnelle : $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$;
- masse de la Terre : $M_T = 5.97 \times 10^{24}$ kg ;
- masse du satellite : $m = 1.0 \times 10^3$ kg ;
- rayon de la Terre : $R_T = 6.4 \times 10^3$ km ;
- coefficient de frottements visqueux : $\alpha = 2.0 \times 10^{-4}$ S.I. ;

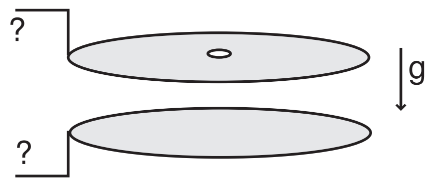
MEC-20: **Satellite freiné (Lancelot PREGNIARD Mines-Ponts 2016), Pb ouvert**

On considère un satellite de la Terre, de masse m, qui subit des frottements de la part de l'atmosphère ; son altitude décroît avec une loi : $\dfrac{\mathrm{d}r}{dt} = -u$, u étant une constante vérifiant $u << v$. La force de frottements est de norme Av^α. Déterminer les constantes A et α.

MEC-21: **Expérience de Millikan(Centrale)**

Millikan

L'expérience de Millikan est l'expérience historique qui a permis la détermination de la charge de l'électron.
Un condensateur plan est constitué de deux disques métalliques de diamètre $D = 0{,}20$ m distants de $d = 20 \times 10^{-3}$ m. L'ensemble est enfermé dans une enceinte isolante et opaque comportant des regards destinés à l'éclairage et à l'observation. Des gouttelettes d'huile pénètrent par une petite ouverture ménagée au centre du disque supérieur. Les gouttelettes sont supposées sphériques.



1. En l'absence de champ électrique appliqué, déterminer, en fonction du temps t, la vitesse $\vec{v}$ de chute d'une gouttelette de rayon r et de masse m supposée initialement au repos.

On rappelle que la force de viscosité de l'air induit une force de freinage de norme $f_r = 6\pi.r.\eta.v$, où η, coefficient de viscosité de l'air vaut : $\eta = 1{,}831 \times 10^{-5}$ Pl, et v est la norme de la vitesse.

On donne :

masse volumique de l'huile	$\rho = 9,143 \times 10^2 \text{kg.m}^{-3}$
masse volumique de l'air	$\rho' = 1,3$ kg.m^{-3}
intensité de la pesanteur	$g = 9,806$ m.s^{-2}
masse de l'électron	$m_0 = 9,0 \times 10^{-31}$ kg
charge de l'électron	$e = 1,602 \times 10^{-19}$ C

2. Préciser la dimension du coefficient de viscosité η en fonction des unités de base du système international (S.I.).
3. On suppose $r = 2,0 \times 10^{-6}$ m. Au bout de combien de temps peut-on considérer que la gouttelette atteint la vitesse limite v_l ? Que pouvez vous en déduire sur le plan expérimental ?
4. Calculer v_l pour $r = 2,0 \times 10^{-6}$ m.
5. En l'absence de champ électrique, la vitesse atteinte est telle que la gouttelette parcourt 7,06 mm en une minute. En déduire le rayon r_1 de la gouttelette.
6. Dans quel sens faut-il charger le condensateur pour que le champ résultant entre les armatures ralentisse les gouttelettes chargées négativement ? On notera U la tension appliquée entre les armatures, et on précisera l'expression et la direction du champ électrique $\overrightarrow{E}$ entre les armatures.
7. Calculer la valeur du potentiel électrique U_0 qui permet d'arrêter le mouvement d'une goutte de rayon r_1 qui porte un électron.
8. Pour réaliser son expérience, Millikan a pulvérisé des micro-gouttes d'huile ionisées négativement (cela peu être obtenu par frottement contre le gicleur par exemple, ou par rayonnement X) entre les armatures d'un condensateur. Puis il a observé à l'aide d'un viseur muni d'un micromètre la distance parcourue par une gouttelette donnée, pendant une durée qu'il a mesurée au chronomètre, les armatures du condensateur étant polarisées sous une tension de quelques kilovolts.
Expliquer comment Millikan a pu déduire de cette expérience la valeur de la charge de l'électron.

MEC-22: **Particules dans des champs électrique et magnétique parallèles (Centrale)**

Particule dans un champ électrique et un champ magnétique parallèles entre eux.

Des particules de charge q sont envoyées à une vitesse v_0 suivant la direction $\overrightarrow{e_y}$. À $t = 0$, elles sont en $O(0,0,0)$, ce point appartenant au plan P.
Entre les plans P et P' règnent les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ parallèles, tous deux orientés selon $\overrightarrow{e_z}$.
Entre les plans P' et P'' les deux champs sont nuls. On néglige la pesanteur.

1. Établir l'équation paramétrique cartésienne de la trajectoire de la particule entre les plans P et P'. On posera $\omega = \frac{q.B}{m}$.
2. On considère le cas où $L \ll \frac{v_0}{\omega}$. Donner la position atteinte par la particule sur le plan P' ainsi que les 3 composantes du vecteur vitesse associé.
3. Donner la position atteinte sur la plaque P''.
4. On envoie un faisceau contenant plusieurs particules. Montrer que les impacts sur P'' des particules de même charge massique $\frac{q}{m}$ forment une parabole, d'une part, et que les particules de même vitesse initiale sont situées sur une droite. À quoi peut servir un tel dispositif ?