
EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

22bis (SUITES ET SÉRIES) *Mines-Ponts*

Pour $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$.

Sous réserve d'existence, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est continue et décroissante sur son domaine de définition.
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et un équivalent simple de f en $+\infty$.
4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et un équivalent simple de f en 0^+ .
5. Montrer que f est intégrable sur $[1, +\infty[$ et exprimer $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ en tant que somme.

13bis (ALGÈBRE) *ESPCI*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A = 0$.

Montrer que le rang de A est pair.