

Planches INP : troisième série

INP • Planche J

■ Exercice majeur

- 1) Donner le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
- 2) On pose, pour tout r réel :

$$s(r) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{r-1}}{1+x} dx.$$

- a. Déterminer le domaine \mathcal{D} de définition de s .
- b. Montrer, par un changement de variable, que pour tout $r \in \mathcal{D}$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{r-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{t^{-r}}{1+t} dt.$$

- 3) L'objet de cette question est le calcul de $s(r)$ pour tout $r \in \mathcal{D}$.
 - a. Étant donné $\alpha > -1$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k t^{k+\alpha} dt.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, 1[$, on a :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k t^{k+\alpha} \right| \leq t^n.$$

En déduire que (u_n) converge vers 0.

- b. En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t} dt$ sous la forme d'une somme de série, puis celle de $s(r)$.

■ Exercice mineur

Soit $P(X) = X^4 + 4$.

- 1) Montrer que P n'est pas scindé sur \mathbb{R} .
- 2) Factoriser P au maximum dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

INP • Planche K

■ Exercice majeur

Une urne contient n boules : b boules blanches et $n-b$ boules noires où $b \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

On effectue des tirages successifs et indépendants. Lorsqu'on tire une boule, on la remplace dans l'urne par une boule de l'autre couleur.

On note X_k le nombre de boules blanches dans l'urne après k tirages.

- 1) Déterminer la loi de X_1 .
- 2) Exprimer $P(X_{k+1} = i)$ en fonction de $P(X_k = i+1)$ et $P(X_k = i-1)$.
- 3) On pose G_k la fonction génératrice de X_k .
 - a. Rappeler la définition de G_k .
Que vaut $G_k(1)$?
Exprimer $E(X_k)$ à l'aide de G'_k .
 - b. Exprimer $G_{k+1}(t)$ à l'aide de G_k et G'_k .
 - c. En déduire une relation entre $E(X_{k+1})$ et $E(X_k)$.
 - d. Exprimer $E(X_k)$ en fonction de k .

■ Exercice mineur

Soit $n \geq 2$ un entier.

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^n = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
- 2) Résoudre l'équation :

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 1.$$

■ Exercice majeur

Soit $a > 0$. On définit une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant :

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont strictement positifs et on pose $v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$.

- 1) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et en déduire que cette suite tend vers $+\infty$.
- 2) Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, prouver l'égalité :

$$v_{n+p+1} - v_{n+p} = \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln \left(\frac{u_{n+p+1}}{u_{n+p}^2} \right),$$

et en déduire l'encadrement :

$$0 \leq v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right).$$

- 3) Pour $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, prouver l'encadrement :

$$0 \leq v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right).$$

- 4) Prouver que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Sa limite est notée ℓ . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$t_n = \exp(2^n \ell) \quad \text{et} \quad s_n = t_n - u_n.$$

- 5) Montrer que u_n est équivalent à t_n quand n tend vers $+\infty$.
- 6) Déterminer une relation entre s_{n+1} , s_n et u_n .
- 7) En déduire que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

■ Exercice mineur

- 1) Soit $M = \begin{pmatrix} 2a & 1 \\ -4 & a \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$.

À quelle condition sur a la matrice M possède-t-elle deux valeurs propres réelles distinctes ?

- 2) Soit $Z \in \mathcal{P}(1)$. On pose $M = \begin{pmatrix} 2Z & 1 \\ -4 & Z \end{pmatrix}$.

Quelle est la probabilité que M possède deux valeurs propres réelles distinctes ? soit diagonalisable ?

■ Exercice majeur

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. On dit qu'un endomorphisme u de E est **antisymétrique** lorsque :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle.$$

- 1) On suppose ici que $E = \mathbb{R}^3$, muni de produit scalaire usuel.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a. Montrer que la matrice A est antisymétrique et donner $f(a, b, c)$ pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
- b. Montrer que f est antisymétrique.
- c. Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux.
Déterminer $\text{rg}(f)$.

On revient au cas général.

- 2) Montrer que u est antisymétrique si et seulement si sa matrice dans toute base orthonormée de E est antisymétrique.
- 3) Montrer, à l'aide du déterminant, que si u est antisymétrique et bijectif, alors $\text{rg}(u)$ est pair.
- 4) Montrer que si u est antisymétrique, alors $\text{rg}(u)$ est pair.

■ Exercice mineur

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{n^2 - 3n + 1}{n!}$.

- 1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.
- 2) Calculer sa somme.

|