

Planches INP : corrigés de la deuxième série

INP • Planche E

■ Exercice majeur

1) Résoudre : $y'(x) + 2\pi x y(x) = 0$ et $y(0) = 1$.

Solution. L'équation différentielle est linéaire homogène du premier ordre, sans singularité. La fonction $a: x \mapsto 2\pi x$ a pour primitive $A: x \mapsto \pi x^2$ donc

$$\mathcal{S}(H) = \{x \mapsto A e^{-\pi x^2}; A \in \mathbb{R}\}.$$

La seule solution y qui vérifie $y(0) = 1$ est celle pour $A = 1$.

Conclusion. L'unique solution de ce problème de Cauchy est $x \mapsto e^{-\pi x^2}$.

2) On donne :
$$\int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

a. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $b_n: t \mapsto t^n \exp(-\pi t^2)$ est intégrable sur \mathbb{R} .

Solution. b_n est c.p.m. sur \mathbb{R} ; comme elle est paire/impaire, il suffit de prouver l'intégrabilité en $+\infty$.

Or :

$$t^2 \times b_n(t) = t^{n+2} \exp(-\pi t^2) = (t^2)^{n/2+1} \exp(-\pi t^2)$$

$$\xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{CC} 0.$$

On en tire que : $b_n = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Comme $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, b_n l'est aussi, donc l'est sur $[0, +\infty[$ (relation de Chasles) puis sur \mathbb{R} grâce à sa parité/impairité.

b. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} b_0(t) dt$.

Solution. L'intégrale existe d'après la question précédente, et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b_0(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi t^2) dt$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} \exp(-(\sqrt{\pi} t)^2) dt.$$

Effectuons le changement de variable affine $u = \sqrt{\pi} t$, pour lequel $du = \sqrt{\pi} dt$.

Quand $t = 0$, $u = 0$, et quand $t \rightarrow +\infty$, $u \rightarrow +\infty$. Alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b_0(t) dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \exp(-(\sqrt{\pi} t)^2) (\sqrt{\pi} dt)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \exp(-u^2) du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1.$$

3) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$B_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} b_n(t) \exp(2i\pi x t) dt.$$

Montrer que B_n est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Solution. On applique le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

Posons $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$(t, x) \mapsto b_n(t) \exp(2i\pi x t).$$

1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(t, x)$ est de classe \mathcal{C}^1 et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = (2i\pi t) b_n(t) \exp(2i\pi x t).$$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t, x)$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ sont c.p.m. sur \mathbb{R} .

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t, x)$ est intégrable sur \mathbb{R} car :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |f(t, x)| = |b_n(t)|$$

et b_n est intégrable sur \mathbb{R} d'après **Q2a**.

4) Pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| = 2\pi |t b_n(t)|.$$

La fonction dominante $\phi: t \mapsto 2\pi |t b_n(t)|$ est intégrable sur \mathbb{R} car paire et négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$ en $+\infty$ (se prouve comme pour b_n , cf. **Q2a**).

Le théorème s'applique : la fonction B_n est bien définie sur \mathbb{R} et elle est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Sa dérivée s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B'_n(x) = 2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t b_n(t) \exp(2i\pi x t) dt.$$

4) Montrer que : $B_0(x) = \exp(-\pi x^2)$.

Solution. Pour calculer l'expression B_0 , on cherche une équation différentielle dont elle serait solution. D'après la question précédente :

$$B'_0(x) = i \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi t \exp(-\pi t^2) \exp(2i\pi x t) dt.$$

Effectuons une IPP dans l'intégrale généralisée. Posons :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) = 2\pi t \exp(-\pi t^2) \quad v(t) = \exp(2i\pi x t)$$

$$u(t) = -\exp(-\pi t^2) \quad v'(t) = 2i\pi x \exp(2i\pi x t).$$

Les fonction u, v sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , et :

$$|u(t)v(t)| = \exp(-\pi t^2) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} 0$$

$$\text{d'où } u(t)v(t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} 0, \text{ limites finies.}$$

L'IPP est donc légitime et donne :

$$B'_0(x) = i \left[\int_{-\infty}^{+\infty} [-\exp(-\pi t^2) \exp(2i\pi x t)] dt \right. \\ \left. + 2i\pi x \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi t^2) \exp(2i\pi x t) dt \right]$$

$$= -2\pi x B_0(x).$$

B_0 est solution sur \mathbb{R} de l'équation $y' + 2\pi x y = 0$; de plus, $B_0(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} b_0(t) dt = 1$ d'après **Q2b**. B_0 est solution du problème de Cauchy de **Q1**; on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B_0(x) = \exp(-\pi x^2).$$

5) Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions définies sur \mathbb{R} , de la forme :

$$x \mapsto P(x) \exp(-\pi x^2) \quad \text{où } P \in \mathbb{C}[X].$$

Montrer que toutes les fonctions B_n appartiennent à E .

Solution. Par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$: fait dans la question précédente, $P_0 := 1$ convient.
- Pour $n = 1$: on procède par IPP comme pour B_0 (les justifications sont de même nature). On obtient :

$$B_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\pi t^2} \times e^{2i\pi x t} dt$$

$$\stackrel{\text{IPP}}{=} - \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{2\pi} e^{-\pi t^2} \times (2i\pi x) e^{2i\pi x t} dt$$

$$= i x B_0(x) = i x e^{-\pi x^2}.$$

Le polynôme $P_1 := iX$ convient.

- **Hérédité double.** Soit $n \geq 2$ tel que la propriété soit vraie aux rang $n-1$ et $n-2$. Montrons-la au rang n , toujours par IPP :

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-\pi t^2} e^{2i\pi x t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\pi t^2} \times t^{n-1} e^{2i\pi x t} dt \\ &\stackrel{\text{IPP}}{=} - \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{2\pi} e^{-\pi t^2} \\ &\quad \times ((n-1)t^{n-2} + (2i\pi x)t^{n-1}) e^{2i\pi x t} dt \\ &\stackrel{\text{lin.}}{=} \frac{n-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{n-2} e^{-\pi t^2} e^{2i\pi x t} dt \\ &\quad + ix \int_{-\infty}^{+\infty} t^{n-1} e^{-\pi t^2} e^{2i\pi x t} dt \\ &= \frac{n-1}{2\pi} B_{n-2}(x) + ix B_{n-1}(x) \\ &= \left(ix P_{n-1}(x) + \frac{n-1}{2\pi} P_{n-2}(x) \right) e^{-\pi x^2}. \end{aligned}$$

Le polynôme $P_n(X) := ix P_{n-1}(X) + \frac{n-1}{2\pi} P_{n-2}(X)$ convient.

■ Exercice mineur

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, A la matrice de E définie par :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ où } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

On pose $\varphi_A: E \rightarrow E, M \mapsto AM - MA$.

- 1) Déterminer $\text{Sp}(\varphi_A)$ et étudier la diagonalisabilité de φ_A .

Solution. Calculons la matrice de φ_A dans la base $\mathcal{B}_{\text{can}} := (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \varphi_A(E_{1,1}) &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_E \\ \varphi_A(E_{1,2}) &= \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (\lambda_1 - \lambda_2) E_{1,2} \\ \varphi_A(E_{2,1}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 \end{pmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) E_{2,1} \\ \varphi_A(E_{2,2}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = 0_E. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \text{mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\varphi_A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_1 - \lambda_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_2 - \lambda_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est diagonale, donc φ_A est diagonalisable et

$$\text{Sp}(\varphi_A) = \{0, \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_1\}.$$

- 2) Généraliser ces résultats au cas où A est une matrice diagonalisable d'ordre 2.

Solution. Prenons $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonalisable : il existe une matrice $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $A = P D P^{-1}$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.

Notons $B_{i,j} := P E_{i,j} P^{-1}$ pour tout $i, j \in \{1, 2\}$.

- **Montrons que les $B_{i,j}$ forment une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.**

Il y a 4 matrices et $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$, donc il suffit de prouver que la famille est libre.

Supposons que $\sum_{1 \leq i, j \leq 2} \alpha_{i,j} B_{i,j} = 0_2$, pour 4 réels $\alpha_{i,j}$. Alors :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq 2} \alpha_{i,j} P E_{i,j} P^{-1} = 0_2, \quad P \left(\sum_{1 \leq i, j \leq 2} \alpha_{i,j} E_{i,j} \right) P^{-1} = 0_2$$

$$\text{d'où : } \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \alpha_{i,j} E_{i,j} = 0_2.$$

Puisque les $E_{i,j}$ forment la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, nécessairement les 4 coefficients $\alpha_{i,j}$ sont nuls.

- **Ensuite, les matrices $B_{i,j}$ sont des vecteurs propres de φ_A .** Par exemple :

$$\begin{aligned} \varphi_A(B_{1,2}) &= (P D P^{-1})(P E_{1,2} P^{-1}) \\ &\quad - (P E_{1,2})(P D P^{-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= P (D E_{1,2} - E_{1,2} D) P^{-1} \\ &= P ((\lambda_1 - \lambda_2) E_{1,2}) P^{-1} \quad \text{d'après Q1} \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) B_{1,2}. \end{aligned}$$

On montre de même que $\varphi_A(B_{1,1}) = \varphi_A(B_{2,2}) = 0_2$, et que $\varphi_A(B_{2,1}) = (\lambda_2 - \lambda_1) B_{2,1}$.

La famille $(B_{1,1}, B_{1,2}, B_{2,1}, B_{2,2})$ est donc **une base de E constituée de vecteurs propres de φ_A .**

Conclusion : φ_A est diagonalisable, et $\text{Sp}(\varphi_A) = \{0, \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_1\}$.

- 3) Traiter le cas où $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Solution. On écrit la matrice de A dans la base canonique ; pour $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \varphi_A(M) &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda x + z & \lambda y + t \\ \lambda z & \lambda t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda x & x + \lambda y \\ \lambda z & z + \lambda t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z & t - x \\ 0 & -z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{On on déduit que : } \text{mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\varphi_A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est :

$$\begin{aligned} \chi &= \begin{vmatrix} X & 0 & -1 & 0 \\ 1 & X & 0 & -1 \\ 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 1 & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 1 & X \end{vmatrix} = X^2 \begin{vmatrix} X & 0 \\ 1 & X \end{vmatrix} \\ &= X^4. \end{aligned}$$

La seule valeur propre réelle de φ_A est 0. Si φ_A était diagonalisable, ce serait l'endomorphisme nul, or ce n'est pas le cas.

Conclusion. $\text{Sp}(\varphi_A) = \{0\}$ et φ_A n'est pas diagonalisable.

INP • Planche F

■ Exercice majeur

Soit F l'ensemble des fonctions dérivables de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} telles que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) = f(\sqrt{x}).$$

Soit G l'ensemble des fonctions dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = e^t g\left(\frac{t}{2}\right).$$

- 1) Montrer que G est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Solution.

- $G \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, qui est un \mathbb{R} -e.v. ;
- $(x \mapsto 0) \in G$, donc $G \neq \emptyset$;
- G est stable par combinaison linéaire : soit $g_1, g_2 \in G, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, g := \alpha g_1 + \beta g_2$. Montrons que $g \in G$. g est dérivable sur \mathbb{R} et :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) &= (\alpha g_1 + \beta g_2)'(t) \\ &= \alpha g_1'(t) + \beta g_2'(t) \\ &= \alpha e^t g_1\left(\frac{t}{2}\right) + \beta e^t g_2\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= e^t ((\alpha g_1 + \beta g_2)\left(\frac{t}{2}\right)) \\ &= e^t g\left(\frac{t}{2}\right). \end{aligned}$$

2) a. Soit $f \in F$. On pose $g : t \mapsto f(e^t)$.

Montrer que g appartient à G .

Solution. exp : $t \mapsto e^t$ est dérivable sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R}_+^* ; f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* par hypothèse, donc $g := f \circ \exp$ est dérivable sur \mathbb{R} . Ensuite :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) &= \frac{d}{dt}(f(e^t)) = e^t \times f'(e^t) = e^t \times f'(\sqrt{e^t}) \\ &= e^t \times f'(e^{t/2}) = e^t \times g\left(\frac{t}{2}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que $g \in G$.

b. Soit $g \in G$. On pose $f : x \mapsto g(\ln x)$.

Montrer que f appartient à F .

Solution. Même principe que la question précédente : \ln est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , à valeurs dans \mathbb{R} ; g est dérivable sur \mathbb{R} , donc $f := g \circ \ln$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* . De plus :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= \frac{d}{dx}(g(\ln x)) = \frac{1}{x} \times g'(\ln x) \\ &= \frac{1}{x} \times e^{\ln(x)} g\left(\frac{\ln(x)}{2}\right) = g(\ln \sqrt{x}) \\ &= f(\sqrt{x}). \end{aligned}$$

On en déduit que $f \in F$.

3) Soit $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence infini et telle que $a_0 = 1$.

On suppose que $g : t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ appartient à G .

a. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{2^k} \frac{1}{(n-1-k)!}.$$

Solution. On traduit le fait que $g'(t) = e^t g\left(\frac{t}{2}\right)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ à l'aide des développements en série entière de g et de l'exponentielle. Le DSE de g se dérive terme à terme sur l'ouvert de convergence, ici \mathbb{R} tout entier. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{t}{2}\right)^n \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} t^n \right). \end{aligned}$$

Les deux séries entières impliquées sont de rayon de convergence infini. Sur \mathbb{R} tout entier, le produit de leurs sommes est donc la somme de leur produit de Cauchy :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \times \frac{a_k}{2^k} \right) t^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{2^k} \frac{1}{(n-1-k)!} \right) t^{n-1}. \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on peut identifier les coefficients devant t^{n-1} et obtenir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{2^k} \frac{1}{(n-1-k)!}.$$

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leq \frac{2^n}{n!}$.

Solution. Montrons, par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$, les propriétés :

$$\mathcal{H}(n): \quad |a_n| \leq \frac{2^n}{n!}.$$

- **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a $|a_0| = 1 \leq \frac{2^0}{0!}$ donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.
- **Hérédité forte.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}(k)$ est vraie pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ (c'est-à-dire pour tout $k < n$). Montrons $\mathcal{H}(n)$. En utilisant la question précédente et l'inégalité triangulaire :

$$|a_n| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{2^k} \frac{1}{(n-1-k)!} \right| \quad (\text{Q3b})$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{2^k (n-1-k)!} \quad (\text{inég. triangulaire}) \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k! (n-1-k)!} \quad (\mathcal{H}(k) \text{ pour chaque } k) \\ &= \frac{1}{n(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \\ &= \frac{2^{n-1}}{n!} \quad (\text{binôme de Newton}) \\ &\leq \frac{2^n}{n!}. \quad (1 \leq 2) \end{aligned}$$

$\mathcal{H}(n)$ est donc démontrée.

4) On admet que toutes les fonctions de G sont développables en série entière sur \mathbb{R} .

a. Montrer que $\dim(G) = 1$.

Solution. Posons g_0 la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$ dont les coefficients sont définis par $a_0 = 1$ et la formule de récurrence forte de Q3a.

Nous allons montrer que $G = \text{Vect}(g_0)$.

* **Montrons que $g_0 \in G$:** comme G est un espace vectoriel, cela prouvera que $\text{Vect}(g_0) \subset G$.

La question Q3b permet de montrer que le rayon de convergence de la série entière définissant g_0 est $+\infty$.

On en déduit que g_0 est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

De plus, en remontant les déductions de Q3a, on montre que $g_0 \in G$.

* **Montrons que $G \subset \text{Vect}(g_0)$.** Prenons $g \in G$. On a admis que g était développable en série entière sur \mathbb{R} : notons $\sum_{n \geq 0} b_n t^n$ la série entière de somme g .

En appliquant à g le raisonnement de Q3a, on montre que la suite $(b_n)_{n \geq 0}$ satisfait la même relation de récurrence forte que $(a_n)_{n \geq 0}$.

On a manifestement $b_0 = b_0 \times 1 = b_0 a_0$. On en déduit, par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$, que $b_n = b_0 a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci conduit à :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = b_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = b_0 g_0(t).$$

En d'autres termes : $g = b_0 g_0$ donc $g \in \text{Vect}(g_0)$.

Conclusion. On a prouvé que $G = \text{Vect}(g_0)$, et comme $g_0 \neq (t \mapsto 0)$, $\dim(G) = 1$.

b. Qu'en déduit-on concernant F ?

Solution. On montre, comme pour G , que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

La question Q2 montre que les applications :

$$\begin{aligned} \Phi : F &\longrightarrow G & \text{et} & \quad \Psi : G &\longrightarrow F \\ f &\longmapsto (t \mapsto f(e^t)) & & \quad g &\longmapsto (x \mapsto g(\ln x)) \end{aligned}$$

sont des applications linéaires correctement définies.

On constate sans peine que :

$$\Psi \circ \Phi = \text{id}_F \quad \text{et} \quad \Phi \circ \Psi = \text{id}_G.$$

Cela prouve que $\Psi : G \rightarrow F$ est un isomorphisme et que $\Psi^{-1} = \Phi$. Comme G est de dimension 1, F est également de dimension 1. Plus précisément, puisque $G = \text{Vect}(g_0)$:

$$F = \text{Vect}(\Psi(g_0)) = \text{Vect}(x \mapsto g_0(\ln x)).$$

■ Exercice mineur

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que

$$X \hookrightarrow \mathcal{P}(a) \quad \text{et} \quad Y \hookrightarrow \mathcal{P}(b).$$

1) Déterminer la loi de $X + Y$ de deux manières différentes.

Solution.

- **1^{re} méthode** : par la fonction génératrice. On connaît les fonctions génératrices de X et Y :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = e^{a(t-1)} \text{ et } G_Y(t) = e^{b(t-1)}.$$

Puisque $X \perp\!\!\!\perp Y$:

$$\forall t \in [-1, 1], \quad G_{X+Y}(t) = G_X(t) \times G_Y(t) = e^{(a+b)(t-1)}.$$

On reconnaît la fonction génératrice associée à la loi $\mathcal{P}(a+b)$: cela prouve que $X+Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(a+b)$.

- **2^e méthode** : par calcul direct.

Comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$, $(X+Y)(\Omega) = \mathbb{N}$.

Prenons $n \in \mathbb{N}$ et calculons $P(X+Y = n)$.

On décompose l'événement $[X+Y = n]$ sur le s.c.e. engendré par X :

$$\begin{aligned} [X+Y = n] &= \bigcup_{k=0}^{\infty} ([X = k] \cap [X+Y = n]) \\ &= \bigcup_{k=0}^{\infty} ([X = k] \cap \underbrace{[Y = n-k]}_{=\emptyset \text{ si } k > n}) \\ &= \bigcup_{k=0}^n ([X = k] \cap [Y = n-k]). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} P(X+Y = n) &= \sum_{k=0}^n P([X = k] \cap [Y = n-k]) \quad (\text{additivité}) \\ &= \sum_{k=0}^n P(X = k) \times P(Y = n-k) \quad (X \perp\!\!\!\perp Y) \\ &= \sum_{k=0}^n e^{-a} \frac{a^k}{k!} \times e^{-b} \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} \quad (\text{déf. lois de Poisson}) \\ &= \frac{e^{-(a+b)}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \frac{e^{-(a+b)}}{n!} (a+b)^n. \quad (\text{binôme de Newton}) \end{aligned}$$

On obtient : $X+Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(a+b)$.

- 2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de X conditionnellement à $[X+Y = n]$.

Solution. Sous l'hypothèse que $X(\omega) + Y(\omega) = n$, puisque $0 \leq X(\omega) \leq X(\omega) + Y(\omega)$, la variable X prend une valeur de $\llbracket 0, n \rrbracket$: $X([X+Y = n]) \subset \llbracket 0, n \rrbracket$.

De plus, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} P_{[X+Y=n]}(X = k) &= \frac{P(X = k, X+Y = n)}{P(X+Y = n)} \\ &= \frac{P(X = k, Y = n-k)}{P(X+Y = n)} \\ &= \frac{P(X = k) \times P(Y = n-k)}{P(X+Y = n)} \\ &= \frac{e^{-a} \frac{a^k}{k!} \times e^{-b} \frac{b^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(a+b)} \frac{(a+b)^n}{n!}} \\ &= \binom{n}{k} \frac{a^k b^{n-k}}{(a+b)^n} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{a}{a+b}\right)^k \left(1 - \frac{a}{a+b}\right)^{n-k}. \end{aligned}$$

Conclusion : $X \xrightarrow{[X+Y=n]} \mathcal{B}\left(n, \frac{a}{a+b}\right)$

- 3) On suppose que $c > 0$ et $p \in [0, 1]$ sont deux constantes, X et Z deux variables aléatoires telles que $Z \rightsquigarrow \mathcal{P}(c)$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, conditionnellement à $[Z = n]$, X suit la loi binomiale de paramètres n et p . Montrer que X et $Z - X$ sont indépendantes, et déterminer leurs lois.

Solution. Posons $Y := Z - X$. Les lois conditionnelles de X montrent que : $\forall \omega \in \Omega, 0 \leq X(\omega) \leq Z(\omega)$, donc $Y(\omega) \geq 0$.

Finalement, X et Y sont à valeurs dans \mathbb{N} .

Posons $q := 1 - p$; pour tous $k, \ell \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} P(X = k, Y = \ell) &= P(X = k, Z = k + \ell) \\ &= P(Z = k + \ell) \times P_{[Z=k+\ell]}(X = k) \\ &= e^{-c} \frac{c^{k+\ell}}{(k+\ell)!} \times \binom{k+\ell}{k} p^k q^\ell \\ &= e^{-(p+q)c} \frac{c^k c^\ell}{k! \ell!} p^k q^\ell \\ &= \left(e^{-pc} \frac{(pc)^k}{k!} \right) \times \left(e^{-qc} \frac{(qc)^\ell}{\ell!} \right). \end{aligned}$$

Ceci prouve d'un seul coup que (X, Y) est un couple de variables indépendantes, de lois respectives $\mathcal{P}(pc)$ et $\mathcal{P}(qc)$.

INP • Planche G

■ Exercice majeur

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, on pose :

$$\|M\|_\infty = \max \{ |m_{i,j}| ; 1 \leq i, j \leq d \}.$$

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Solution. La matrice A est triangulaire, donc son spectre se lit sur sa diagonale : $\text{Sp}(A) = \{1\}$.

Par l'absurde, si A était diagonalisable, il existerait une matrice $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \text{diag}(1, 1, 1) P^{-1} = I_3.$$

Comme $A \neq I_3$, A n'est pas diagonalisable.

- 2) On pose $N := A - I_3$.

Calculer N^2 , puis les autres puissances de N .

Solution. Calculons les puissances de N :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

puis, par une récurrence sur $n \in \llbracket 3, \infty \rrbracket$, $N^k = 0_3$ pour tout $k \geq 3$.

- 3) Déterminer la limite de $\|A^n\|_\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Solution. On part de $A = I_3 + N$. Comme I_3 et N commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton : pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} A^n &= (I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} \\ &= I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 + 0_3 + \dots + 0_3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2n & 3n - n(n-1) \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La norme de cette matrice est minorée par la valeur absolue de son coefficient d'indice $(1, 2)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|A^n\|_\infty \geq |2n| = 2n.$$

Comme $2n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, par théorème de comparaison :

$$\|A^n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

- 4) Vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

Solution.

* $\|\cdot\|_\infty$ est bien définie, de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ dans \mathbb{R} ;

* **Séparation.** Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ telle que $\|M\|_\infty = 0$. Alors :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad 0 \leq |m_{i,j}| \leq \|M\|_\infty = 0 \quad \text{d'où} \quad m_{i,j} = 0.$$

Ainsi $M = 0_d$.

* **Homogénéité.** Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\begin{aligned} \|\alpha M\|_\infty &= \max_{1 \leq i, j \leq d} \{ |\alpha m_{i,j}| \} \\ &= \max_{1 \leq i, j \leq d} \{ |\alpha| |m_{i,j}| \} \\ &= |\alpha| \cdot \max_{1 \leq i, j \leq d} \{ |m_{i,j}| \} \quad \text{car } |\alpha| \geq 0 \quad \text{et indep. de } (i, j) \\ &= |\alpha| \cdot \|M\|_\infty. \end{aligned}$$

* **Inégalité triangulaire.** Soit $M = (m_{i,j})$ et $N = (n_{i,j})$ de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. On a :

$$\|M + N\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq d} \{ |m_{i,j} + n_{i,j}| \}.$$

Or, pour tout $i, j \in \llbracket 1, d \rrbracket$:

$$|m_{i,j} + n_{i,j}| \leq |m_{i,j}| + |n_{i,j}| \leq \|M\|_\infty + \|N\|_\infty,$$

majorant indépendant de (i, j) . On en déduit que :

$$\|M + N\|_\infty \leq \|M\|_\infty + \|N\|_\infty.$$

5) Pour tout couple (M, N) de matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, prouver la majoration :

$$\|MN\|_\infty \leq d \times \|M\|_\infty \times \|N\|_\infty.$$

Solution. Soit $M = (m_{i,j})$ et $N = (n_{i,j})$ deux matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Notons $MN = (p_{i,j})$. Par définition :

$$\|MN\|_\infty = \max \{ |p_{i,j}| ; 1 \leq i, j \leq d \}.$$

Pour majorer $\|MN\|_\infty$, on majore les éléments de cet ensemble : pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, d \rrbracket^2$:

$$|p_{i,j}| = \left| \sum_{k=1}^d m_{i,k} n_{k,j} \right| \leq \sum_{k=1}^d |m_{i,k} n_{k,j}| = \sum_{k=1}^d |m_{i,k}| |n_{k,j}|.$$

Or : $\forall k \in \llbracket 1, d \rrbracket, |m_{i,k}| \leq \|M\|_\infty$ et $|n_{k,j}| \leq \|N\|_\infty$.

En sommant les inégalités :

$$|p_{i,j}| \leq \sum_{k=1}^d \|M\|_\infty \|N\|_\infty = \underbrace{d \|M\|_\infty \|N\|_\infty}_{\text{indépendant de } (i, j)}$$

d'où : $\|MN\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq d} |p_{i,j}| \leq d \|M\|_\infty \|N\|_\infty$

6) On suppose que M est diagonalisable et possède au moins une valeur propre de module strictement supérieur à 1.

Déterminer la limite de $\|M^n\|_\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Solution. Soit $D \in \mathcal{D}_p(\mathbb{C})$ et $P \in \text{GL}_d(\mathbb{C})$ telles que $M = P D P^{-1}$. De façon classique, on montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = P D^n P^{-1}.$$

De plus, D^n contient sur sa diagonale un terme λ^n où $|\lambda| > 1$.

On en déduit que $\|D^n\|_\infty \geq |\lambda|^n$,

et puisque $|\lambda|^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, par théorème de comparaison :

$$\|D^n\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty.$$

En utilisant Q5, on peut minorer la norme de M^n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = P^{-1} M^n P$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \|D^n\|_\infty &= \|P^{-1} \times M^n \times P\|_\infty \\ &\leq d^2 \|P^{-1}\|_\infty \|M^n\|_\infty \|P\|_\infty. \end{aligned}$$

Soulignons que $\|P^{-1}\|_\infty \neq 0$ et que $\|P\|_\infty \neq 0$, sinon les matrices P^{-1} et P seraient nulles, donc non inversibles. On obtient :

$$\|M^n\|_\infty \geq \frac{1}{d^2 \|P^{-1}\|_\infty \|P\|_\infty} \|D^n\|_\infty.$$

Encore une fois par le théorème de comparaison pour les limites :

$$\|M^n\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty.$$

■ Exercice mineur

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On pose :

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^{\pi/2} f(t) g(t) dt.$$

1) Montrer que E est un espace préhilbertien réel.

Solution. Il s'agit de justifier que $\phi := \langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E :

- * $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ (les intégrales ne sont pas généralisées)
- * ϕ est **symétrique** car le produit de réels est commutatif ;
- * ϕ est **linéaire à gauche** car l'intégration est linéaire ; ϕ est par conséquent **bilinéaire** ;
- * ϕ est **positive** grâce à la positivité de l'intégrale ;
- * Montrons qu'elle est **définie positive** : supposons $\phi(f, f) = 0$. Alors f^2 est d'intégrale nulle sur $[0, \pi/2]$ alors que c'est une fonction **continue** et positive. On en déduit que f^2 est identiquement nulle sur $[0, \pi/2]$ (stricte positivité de l'intégrale), donc que f l'est aussi.

2) Calculer $\|\cos\|^2$.

Solution. $\|\cos\|^2 = \langle \cos, \cos \rangle = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) dt$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

3) Orthonormaliser la famille (\sin, \cos) .

Solution.

- On montre de la même façon que $\|\sin\|^2 = \frac{\pi}{4}$.
Calculons $\langle \cos, \sin \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \cos, \sin \rangle &= \int_0^{\pi/2} \cos(t) \sin(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin(2t) dt \\ &= \frac{1}{4} \left[-\cos(2t) \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4} \left[-(-1) + 1 \right] \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- On orthogonalise la famille (\sin, \cos) .
On redresse la fonction \cos en posant :

$$f_2 = \cos - \frac{\langle \cos, \sin \rangle}{\|\sin\|^2} \sin = \cos - \frac{2}{\pi} \sin,$$

$$\begin{aligned} \text{puis } \|f_2\|^2 &= \|\cos\|^2 + \frac{4}{\pi^2} \|\sin\|^2 - \frac{4}{\pi} \langle \cos, \sin \rangle \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi} = \frac{\pi^2 - 4}{\pi}. \end{aligned}$$

Conclusion. La famille

$$\left(g_1 := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin, \quad g_2 := \sqrt{\frac{\pi}{\pi^2 - 4}} \left(\cos - \frac{2}{\pi} \sin \right) \right)$$

est orthonormée.

INP • Planche H

■ Exercice majeur

1) On pose $P = X^2 - 2X + 1$ et $Q = P + P' + P''$.

Vérifier que la fonction P est positive sur \mathbb{R} et que Q y est strictement positive.

Solution. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$$

$$Q(x) = (x-1)^2 + 2(x-1) + 2 = x^2 + 1 \geq 1 > 0.$$

2) Soit $P \in \mathbb{R}_{2n}[X] \setminus \{0\}$. On suppose que la fonction P est positive sur \mathbb{R} et on pose :

$$Q = \sum_{k=0}^{2n} P^{(k)}.$$

a. Exprimer Q' .

Solution. $Q' = \sum_{k=0}^{2n} P^{(k+1)} = \sum_{k=1}^{2n+1} P^{(k)}$,
 mais puisque $\deg(P) \leq 2n$, $P^{(2n+1)} = 0$,
 donc $Q' = \sum_{k=1}^{2n} P^{(k)} = Q - P^{(0)} = Q - P$.

b. À l'aide de la fonction $g: t \mapsto e^{-t} Q(t)$, montrer que la fonction Q est strictement positive sur \mathbb{R} .

Solution. La fonction g est dérivable sur \mathbb{R} et :
 $\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = e^{-t} (-Q(t) + Q'(t))$
 $= -e^{-t} P(t) \leq 0$.

La fonction g est donc décroissante (au sens large) sur \mathbb{R} . De plus, comme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$:

$$P(t) = O(t^{2n}), \quad \text{d'où} \quad g(t) = O(t^{2n} e^{-t}).$$

Par croissances comparées, $t^{2n} e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, donc $g(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ également. Puisque g est décroissante sur \mathbb{R} et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$, $g(t) \geq 0$ pour tout réel $t \in \mathbb{R}$.

Par l'absurde, supposons que g s'annule en un point $t_0 \in \mathbb{R}$. Alors g serait identiquement nulle sur l'intervalle $]t_0, +\infty[$, donc $g' = 0$ sur $]t_0, +\infty[$. En multipliant par e^t , on en déduit que Q serait nul sur $]t_0, +\infty[$, donc aurait une infinité de racines : ce serait le polynôme nul. De plus, $\deg(Q) = \deg(P)$: puisque P n'est pas le polynôme nul, pour tout $k \geq 1$, $\deg(P^{(k)}) < \deg(P)$ d'où on tire

$$\deg(Q) = \deg(P + P' + P'' + \dots + P^{(2n)}) = \deg(P).$$

Dire que Q est nul entraîne que P est nul également, **ce qui contredit l'hypothèse sur P** . On en déduit que $g(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc que $Q(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3) Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$(P | Q) = \sum_{k=0}^{2n} (PQ)^{(k)}(0).$$

a. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire.

Solution. Posons $\phi : (P, Q) \mapsto (P | Q)$.

- 1) $\phi : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ est correctement défini.
- 2) ϕ est symétrique car le produit de polynômes est commutatif.
- 3) ϕ est linéaire à gauche grâce à la linéarité de la dérivation, de l'évaluation en 0 et de la sommation. ϕ est donc bilinéaire.
- 4) Soit $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ quelconque. Nous allons montrer que :

$$P = 0 \implies \phi(P, P) = 0$$

et $P \neq 0 \implies \phi(P, P) > 0$.

Cela prouvera automatiquement que ϕ est définie positive : $\phi(P, P) \geq 0$ est toujours vrai, et $\phi(P, P) = 0$ seulement si $P = 0$.

La première implication est immédiate. Quant à la deuxième, supposons désormais P non nul. Par définition de ϕ :

$$\phi(P, P) = \sum_{k=0}^{2n} (P^2)^{(k)}(0).$$

Le polynôme P^2 est non nul, positif sur \mathbb{R} . D'après le résultat de **Q2b** appliqué avec P^2 dans le rôle de P : $\phi(P, P) > 0$.

b. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.

Solution. Nous allons orthogonaliser la base $(P_0, P_1) := (1, X)$ de $\mathbb{R}_1[X]$ par le procédé de Gram-Schmidt. Avant cela, remarquons que pour tous $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} (X^i | X^j) &= \sum_{k=0}^{2n} (X^{i+j})^{(k)}(0) \\ &= \left(X^{i+j} + (i+j)X^{i+j-1} + \dots + \frac{(i+j)!}{1!} X + (i+j)! \right)(0) \\ &= (i+j)!. \end{aligned}$$

Orthogonalisons la famille :

- On pose : $Q_0 := P_0 = 1$, de sorte que : $\|Q_0\|^2 = (X^0 | X^0) = (0+0)! = 1$.
- On redresse P_1 :

$$\begin{aligned} \widehat{P}_1 &:= P_1 - \frac{(P_1 | Q_0)}{\|Q_0\|^2} Q_0 = X - (X | 1) \\ &= X - (1+0)! = X - 1. \end{aligned}$$

On pose $Q_1 := X - 1$ et :

$$\begin{aligned} \|Q_1\|^2 &= \|X - 1\|^2 = \|X\|^2 - 2(X | 1) + \|1\|^2 \\ &= 2! - 2 \cdot 1! + 0! = 1. \end{aligned}$$

Bilan : $P_0 = 1 \quad Q_0 = 1 \quad \|Q_0\|^2 = 1$
 $P_1 = X \quad Q_1 = X - 1 \quad \|Q_1\|^2 = 1$.

La famille $(Q_0, Q_1) = (1, X - 1)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$.

c. Calculer la distance de X^n à $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.

Ce nombre est noté u_n .

Solution. Grâce à la base **orthonormée** (Q_0, Q_1) de $\mathbb{R}_1[X]$, on calcule le projeté orthogonal de X^n sur cet espace :

$$\begin{aligned} p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^n) &= (X^n | Q_0) Q_0 + (X^n | Q_1) Q_1 \\ &= (X^n | 1) Q_0 + (X^n | X - 1) Q_1 \\ &= n! Q_0 + ((X^n | X) - (X^n | 1)) Q_1 \\ &= n! Q_0 + ((n+1)! - n!) Q_1 \\ &= n! Q_0 + (n \cdot n!) Q_1. \end{aligned}$$

On en tire :

$$\begin{aligned} u_n = d(X^n, \mathbb{R}_1[X]) &= \sqrt{\|X^n\|^2 - \|p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^n)\|^2} \\ &= \sqrt{(2n)! - ((n!)^2 + (n \cdot n!)^2)} \end{aligned}$$

car (Q_0, Q_1) est une famille orthonormée.

Finalement :

$$u_n = \sqrt{(2n)! - (n^2 + 1) \cdot (n!)^2}.$$

4) Étudier la nature de la série de terme général $(u_n)^{-1/n}$. Pour cela, on donne le développement asymptotique :

$$\ln(n!) = n \ln(n) - n + o(n) \quad \text{à } n \rightarrow \infty.$$

Solution. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} (u_n)^{-1/n} &= \left[(2n)! - (n^2 + 1) \cdot (n!)^2 \right]^{-\frac{1}{2n}} \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2n} \ln\left[(2n)! - (n^2 + 1) \cdot (n!)^2\right]\right). \end{aligned}$$

Dans l'argument du logarithme, regardons lequel des deux termes est prépondérant en cherchant un équivalent de leur rapport :

$$\begin{aligned} \frac{(2n)!}{(n^2 + 1) \cdot (n!)^2} &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{n^2 \cdot \left(\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} = \frac{\sqrt{4\pi n} 4^n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{n^2 \cdot (2\pi n) \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \\ &= \frac{\sqrt{2} \cdot 4^n}{\sqrt{\pi} \cdot n^{5/2}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} +\infty. \end{aligned}$$

C'est $(2n)!$ qui l'emporte. On factorise de force par ce terme dans l'argument du logarithme :

$$\begin{aligned}(u_n)^{-1/n} &= \exp\left(-\frac{1}{2n} \ln\left[(2n)! \times \left(1 - \frac{(n^2+1) \cdot (n!)^2}{(2n)!}\right)\right]\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2n} \left[\ln((2n)!) + \ln\left(1 - \frac{(n^2+1) \cdot (n!)^2}{(2n)!}\right)\right]\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2n} [\ln((2n)!) + o(1)]\right).\end{aligned}$$

On utilise alors le développement asymptotique rappelé, avec le changement de variable $n \leftarrow 2n$:

$$\begin{aligned}(u_n)^{-1/n} &= \exp\left(-\frac{1}{2n} \left[(2n) \ln(2n) - (2n) + \underbrace{o(2n) + o(1)}_{=o(n)}\right]\right) \\ &= \exp(-\ln(2n) + 1 + o(1)) \\ &= \frac{e}{2n} \times e^{o(1)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e}{2n}.\end{aligned}$$

Puisque la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e}{2n}$ est divergente (multiple de la série harmonique) et à termes positifs, on en conclut que $\sum_{n \geq 1} (u_n)^{-1/n}$ est divergente.

■ Exercice mineur

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est semblable à une matrice diagonale D .

Solution. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 9X + 8 = (X-1)(X-8)$. Il est scindé à racines simples dans \mathbb{R} , donc A est \mathbb{R} -diagonalisable. Plus précisément, $A \underset{\sim}{\sim} D := \text{diag}(1, 8)$.

2) Déterminer une matrice B telle que $B^3 = A$.

Solution.

• **Diagonalisons la matrice A .**

On sait que A a deux racines propres simples : il suffit de trouver un vecteur propre pour chaque valeur propre de A (à savoir 1 et 8) :

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 8I_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$$

où l'on constate : $2C_1 + 5C_2 = 0_{2,1}$ et $C_1 - C_2 = 0_{2,1}$.

Les vecteurs $V_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $V_8 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ conviennent.

Ainsi $A = P D P^{-1}$ en posant $P := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

• La matrice $\Delta := \text{diag}(0, 2)$ vérifie immédiatement $\Delta^3 = D$. En posant $B := P \Delta P^{-1}$:

$$B^3 = P \Delta^3 P^{-1} = P D P^{-1} = A.$$

Cette matrice B répond à la question. Reste la calculer :

$$\begin{aligned}B &= P \text{diag}(1, 2) P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

3) Montrer que la matrice B trouvée à la question précédente est unique.

Solution. Supposons que $B^3 = A$. On pose $\Delta := P^{-1} B P$ et on montre que Δ est nécessairement $\text{diag}(1, 2)$.

Tout d'abord, $\Delta^3 = P^{-1} B^3 P = P^{-1} A P = D$.

Cela entraîne que Δ commute avec D :

$$\Delta \times D = \Delta^3 \times \Delta = \Delta^4 = \Delta \times \Delta^3 = D \times \Delta.$$

En écrivant $\Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et calculant séparément $\Delta \times D$ et $D \times \Delta$, on obtient en les égalisant que $8b = b$ et $c = 8c$, donc $b = c = 0$: Δ est diagonale.

En exploitant maintenant $\Delta^3 = D$, on obtient $a^3 = 1$ et $d^3 = 8$: nécessairement $a = 1$ et $d = 2$ (la fonction $t \mapsto t^3$ est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R}).

Finalement $\Delta = \text{diag}(1, 2)$ et $B = P \text{diag}(1, 2) P^{-1}$: on a prouvé qu'une seule matrice B convient.