

#### 4.2.2 Dynamique référentiels en rotation-Exercice 22

---

On considère deux amis qui souhaitent se lancer une balle. Ils sont assis l'un en face de l'autre sur un tourniquet de rayon  $R$ .

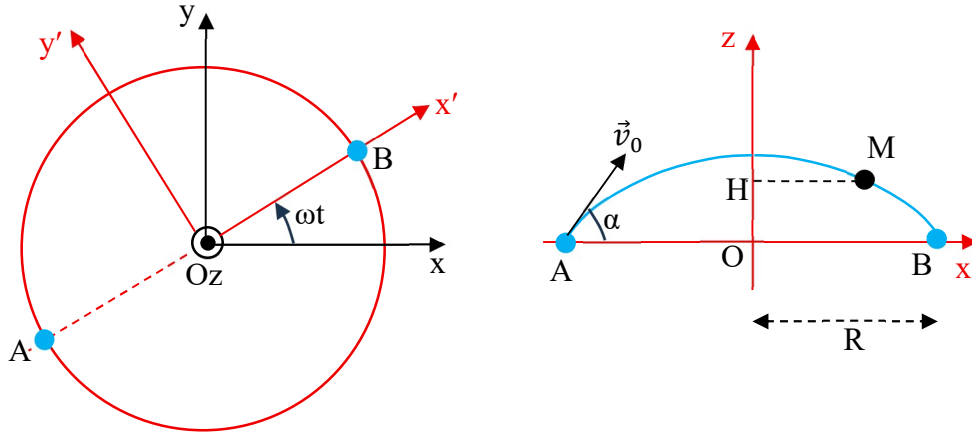
- a-Le tourniquet est immobile. Quelle est l'équation que doivent vérifier  $v_0$  et  $\alpha$ , respectivement la norme de la vitesse initiale et l'angle du lancer par rapport à l'horizontale ?
- b-Le tourniquet est en rotation à la vitesse angulaire constante  $\omega$  autour de son axe vertical.  
Montrer que si le premier ami ne change pas son lancer, le deuxième ne pourra pas attraper la balle.  
Déterminer le point de chute de la balle sur le tourniquet.
- c-De quel angle  $\beta$ , le deuxième ami doit-il se décaler pour attraper la balle ?
-

#### 4.2.2 Dynamique référentiels en rotation-Exercice 22

$R(Oxyz)$  : référentiel terrestre supposé galiléen

$R'(Ox'y'z)$  : référentiel lié au tourniquet non galiléen car en rotation uniforme autour de  $R$

Système : la balle  $M$  de masse  $m$



a-Principe fondamental de la dynamique à la balle dans  $R'$  galiléen car immobile :  $m\vec{a}_{M/R'} = m\vec{g}$

$$\text{En projections : } \begin{cases} \ddot{x}' = 0 \\ \ddot{y}' = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \quad \text{On en déduit : } \begin{cases} \dot{x}' = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y}' = 0 \\ \dot{z} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad \text{Puis : } \begin{cases} x' = v_0 \cos \alpha t - R \\ y' = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t \end{cases}$$

B est atteint à l'instant  $t_f$  tel que :  $z(t_f) = 0$  soit :  $t_f = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$

$$\text{On a alors : } x'(t_f) = R = v_0 \cos \alpha \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} - R \quad \text{D'où la relation : } \boxed{2Rg = v_0^2 \sin 2\alpha}$$

b-Principe fondamental de la dynamique à la balle dans  $R'$  non galiléen :  $m\vec{a}_{M/R'} = m\vec{g} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$

$$\text{On a : } \vec{F}_{ie} = m\omega^2 \overrightarrow{HM} = m\omega^2(x'\vec{u}_{x'} + y'\vec{u}_{y'})$$

$$\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{M/R'} = -2m\omega \vec{u}_z \wedge (\dot{x}'\vec{u}_{x'} + \dot{y}'\vec{u}_{y'} + \dot{z}\vec{u}_z) = 2m\omega \dot{y}'\vec{u}_{x'} - 2m\omega \dot{x}'\vec{u}_{y'}$$

$$\text{En projections : } \begin{cases} \ddot{x}' = \omega^2 x' + 2\omega \dot{y}' \\ \ddot{y}' = \omega^2 y' - 2\omega \dot{x}' \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \quad \text{Selon } Oz, \text{ on a toujours : } z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t$$

Pour résoudre le système en  $x'$  et  $y'$ , on pose  $X = x' + jy'$

$$\text{Donc : } \ddot{X} = \omega^2 x' + 2\omega \dot{y}' + j(\omega^2 y' - 2\omega \dot{x}') = \omega^2 X - 2\omega j\dot{X}$$

$$\text{D'où : } \ddot{X} + 2\omega j\dot{X} - \omega^2 X = 0$$

$$\text{Equation caractéristique : } r^2 + 2\omega jr - \omega^2 = 0 \quad \text{Discriminant : } \Delta = (2j\omega)^2 + 4\omega^2 = 0$$

$$\text{Solution : } X = (A + Bt)e^{-j\omega t}$$

$$\text{Conditions initiales : } X(0) = -R = A \quad \text{et} \quad \dot{X}(0) = B - j\omega A = v_0 \cos \alpha$$

$$\text{Donc : } X = (-R + v_0 \cos \alpha t - j\omega R t)e^{-j\omega t} = (-R + v_0 \cos \alpha t - j\omega R t)(\cos \omega t - j \sin \omega t)$$

$$\text{On en déduit : } x' = (-R + v_0 \cos \alpha t) \cos \omega t - \omega R t \sin \omega t$$

$$y' = -\omega R t \cos \omega t - (-R + v_0 \cos \alpha t) \sin \omega t$$

La balle retombe sur le tourniquet à l'instant  $t_f$  tel que :  $z(t_f) = 0$  soit :  $t_f = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$

$$\text{On a alors les coordonnées du point de chute : } \begin{cases} x'(t_f) = R \cos \omega t_f - \omega R t_f \sin \omega t_f \\ y'(t_f) = -\omega R t_f \cos \omega t_f - R \sin \omega t_f \end{cases}$$

La balle est déviée dans le sens négatif de l'axe  $Oy$ . Le joueur B ne pourra pas la rattraper.

On vérifie que pour  $\omega = 0$ , on retrouve le résultat de la question a.

c-Le deuxième ami doit se décaler d'un angle  $\beta$  tel que :  $\boxed{\tan \beta = \frac{y'(t_f)}{x'(t_f)}}$