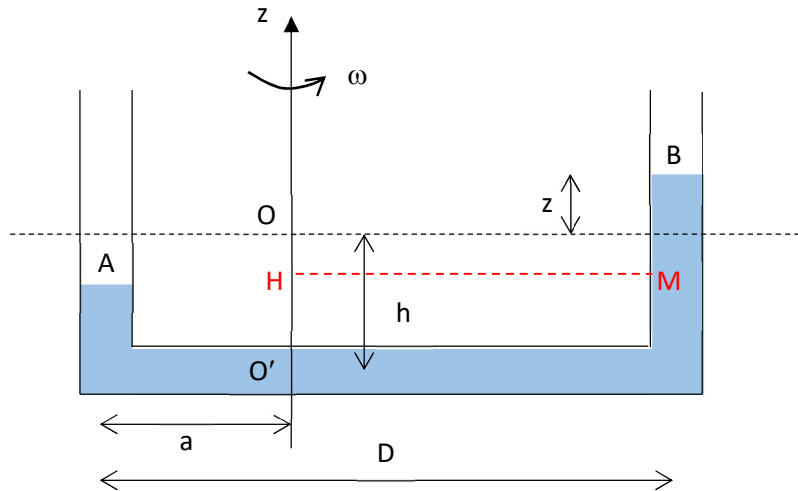


4.2.2 Dynamique référentiels en rotation-Exercice 8

Un fluide homogène, parfait, incompressible de masse volumique ρ , est contenu dans un tube en U en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour de l'axe Oz. La longueur totale de liquide est $L = D + 2h$. On note R le référentiel non galiléen lié au tube et on utilise le système de coordonnées cylindriques.



a-Donner la loi de la statique des fluides dans le référentiel R .

b-Etablir l'expression de la pression $P(r,z)$ en fonction de la pression en O' et des autres paramètres du problème.

c-En égalant $P(A)$ et $P(B)$, établir la loi $\omega(z)$.

a-Equation fondamentale de la statique des fluides dans R non galiléen : $\rho \vec{g} - \rho \vec{a}_e = \vec{\text{grad}}P$

b- R est en rotation uniforme par rapport à un référentiel galiléen. On a : $\vec{a}_e = -\omega^2 \vec{HM} = -\omega^2 r \vec{u}_r$

$$\rho \vec{g} - \rho \vec{a}_e = \vec{\text{grad}}P(M) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial r} = \rho \omega^2 r & (1) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 & (2) \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g & (3) \end{cases} \quad \text{en projection dans la base cylindrique}$$

(2) \Rightarrow la pression ne dépend pas de θ

$$(1) \Rightarrow P(M) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + K(z)$$

$$(3) \Rightarrow \frac{dK}{dz} = -\rho g \Rightarrow K(z) = -\rho g z + K \quad K = \text{constante}$$

$$\text{Donc : } P(M) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g z + K \quad \text{et on a } P(O') = \rho g h + K \quad \text{d'où : } P(M) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g(z+h) + P(O')$$

c-Quand B monte de $z(B) = z$, alors A descend de $z(A) = -z$

$$\text{On a : } P(B) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (D-a)^2 - \rho g(z+h) + P(O') \quad \text{et } P(A) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 a^2 - \rho g(-z+h) + P(O')$$

$$\text{En égalant } P(A) \text{ et } P(B) : \frac{1}{2} \rho \omega^2 (D-a)^2 - \rho g(z+h) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 a^2 - \rho g(-z+h)$$

$$\frac{1}{2} \rho \omega^2 [(D-a)^2 - a^2] = 2\rho g z$$

$$\text{Donc : } \omega(z) = \sqrt{\frac{4gz}{D(D-2a)}}$$

La mesure de z permet de connaître la vitesse angulaire.