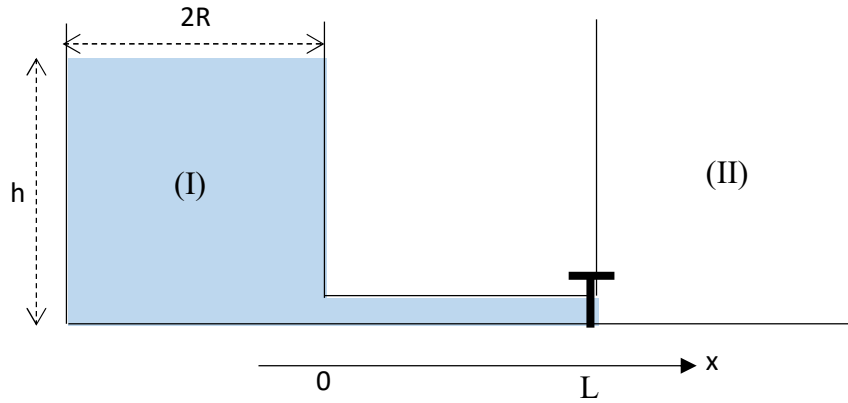


4.6 Ecoulements visqueux-Exercice 7

Un réservoir (I) de rayon R contient un fluide visqueux de masse volumique μ et viscosité η sur une hauteur h . Il est en contact avec un réservoir identique par une conduite de longueur L et rayon $a \ll R$. A $t = 0$ on ouvre la vanne. L'écoulement est supposé stationnaire et incompressible.



- a-Déterminer le champ eulérien des vitesses dans la conduite en fonction de η , L , a , $\Delta P = P(0) - P(L)$.
- b-En déduire le débit volumique Q_v dans la conduite.
- c-Déterminer les hauteurs de fluide dans les deux réservoirs en fonction du temps.
- d-Combien de temps faut-il pour atteindre la hauteur finale dans le deuxième réservoir à 1% près ?

Données : $R = 0,5 \text{ m}$; $h = 1 \text{ m}$; $a = 5 \text{ mm}$; $L = 0,5 \text{ m}$; $\mu = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$; $\eta = 10^{-2} \text{ Pa.s}$

Laplacien d'une fonction $f(r)$ en coordonnées cylindriques : $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right)$

Equation de Navier-Stokes : $\mu \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right] = \mu \vec{g} - \text{grad} P + \eta \Delta \vec{v}$

4.6 Ecoulements visqueux-Exercice 7

a-Le fluide s'écoule dans une canalisation cylindrique d'axe Ox, de longueur L, de rayon a.

On utilise les coordonnées cylindriques (r,θ,x). On a : $\vec{v}(M) = v_x(r, x)\vec{u}_x$ et $P(M) = P(x)$

Ecoulement incompressible : $\text{div}\vec{v}(M) = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$ $v_x(r, x)$ ne dépend pas de x, donc : $\vec{v}(M) = v_x(r)\vec{u}_x$

On calcule : $(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v}(M) = (v_x \cdot \frac{\partial}{\partial x})\vec{v}(r) = \vec{0}$

L'équation de Navier-Stokes en projection selon Ox donne : $0 = -\frac{dP}{dx}(x) + \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_x}{dr}(r) \right)$

$$\Rightarrow \underbrace{\eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_x}{dr}(r) \right)}_{\text{ne dépend que de } r} = \underbrace{\frac{dP}{dx}(x)}_{\text{ne dépend que de } x} = \text{constante } K$$

On a donc deux équations différentielles découplées :

$$\bullet \frac{dP}{dx}(x) = K \Rightarrow P(x) = Kx + K' \Rightarrow P(x) = \frac{P(L) - P(0)}{L}x + P(0) \text{ avec les conditions aux limites}$$

$$\begin{aligned} \bullet \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_x}{dr}(r) \right) &= K = \frac{-\Delta P}{L} \Rightarrow \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_x}{dr}(r) \right) = \frac{-\Delta P}{\eta L} r \Rightarrow r \frac{dv_x}{dr}(r) = \frac{-\Delta P}{2\eta L} r^2 + A \\ &\Rightarrow \frac{dv_x}{dr}(r) = \frac{-\Delta P}{2\eta L} r + \frac{A}{r} \\ &\Rightarrow v_x(r) = \frac{-\Delta P}{4\eta L} r^2 + A \ln r + B \end{aligned}$$

$$\text{Conditions aux limites : } \bullet v_x(0) \text{ finie} \Rightarrow A = 0 \quad \bullet v_x(a) = \frac{-\Delta P}{4\eta L} a^2 + B = 0 \Rightarrow B = \frac{\Delta P}{4\eta L} a^2$$

$$\text{Donc : } v_x(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L} (a^2 - r^2)$$

$$b-Q_v = \iint_{(S)} \vec{v}(M, t) \cdot d\vec{S}(M) = \iint_{(S)} \frac{\Delta P}{4\eta L} (a^2 - r^2) r dr d\theta = \frac{\Delta P}{4\eta L} \int_0^R (a^2 - r^2) r dr \int_0^{2\pi} d\theta \quad \text{D'où : } Q_v = \frac{\pi a^4}{8\eta L} \Delta P$$

c-On note $h_1(t)$ (resp. $h_2(t)$) la hauteur de fluide dans le réservoir (I) (resp. (II))

$$\text{Bilan de volume pour le réservoir (I) : } \frac{d(\pi R^2 h_1)}{dt} = -Q_v \Rightarrow \frac{dh_1}{dt} = -\frac{a^4}{8\eta L R^2} \Delta P$$

$$\text{Bilan de volume pour le réservoir (II) : } \frac{d(\pi R^2 h_2)}{dt} = +Q_v \Rightarrow \frac{dh_2}{dt} = \frac{a^4}{8\eta L R^2} \Delta P$$

$$\text{On en déduit : } \frac{dh_1}{dt} + \frac{dh_2}{dt} = 0 \Rightarrow h_1 + h_2 = \text{constante} = h$$

L'écoulement étant très lent car $a \ll R$, les fluides sont presque au repos dans les réservoirs. L'équation de l'hydrostatique donne : $P(0) = P_0 + \mu g h_1$ et $P(L) = P_0 + \mu g h_2 \Rightarrow \Delta P = \mu g (h_1 - h_2) = \mu g (2h_1 - h)$

$$\frac{dh_1}{dt} + \frac{\mu g a^4}{4\eta L R^2} h_1 = \frac{\mu g a^4}{8\eta L R^2} h \quad \text{de solution : } h_1(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{h}{2} \quad \text{avec } \tau = \frac{4\eta L R^2}{\mu g a^4}$$

$$\text{Or } h_1(0) = A + \frac{h}{2} = h \quad \text{donc : } A = \frac{h}{2}$$

$$\text{Finalement : } h_1(t) = \frac{h}{2} (1 + e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad \text{et} \quad h_2(t) = \frac{h}{2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$d\text{-On veut : } h_2(t) = 0,99 \frac{h}{2} = \frac{h}{2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = 0,01 \Rightarrow t = -\tau \ln(0,01)$$

$$\text{A.N : } t = 3755 \text{ s} \approx 1 \text{ h } 02 \text{ min } 35 \text{ s}$$