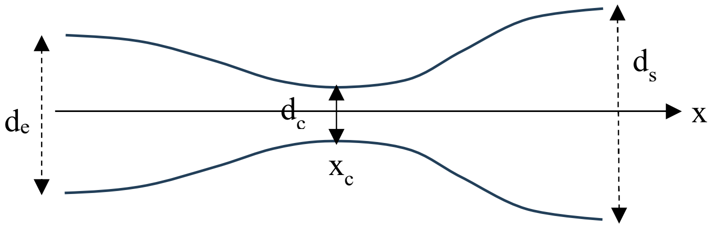
4.7.1 Euler-Exercice 3

On considère une tuyère pour fusée de section $S(x)$ dans laquelle s'écoule un gaz.

Hypothèses :

- Ecoulement stationnaire
- Ecoulement parfait
- Ecoulement selon Ox
- Température T constante
- Célérité du son $c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}$ constante
- $v(M) = v(x)$
- $P(M) = P(x)$
- $\rho(M) = \rho(x)$



a-Montrer que : $\frac{dS}{S} + \frac{dv}{v} + \frac{d\rho}{\rho} = 0$

b-A l'aide de l'équation d'Euler, montrer que : $\frac{dS}{S} = (M^2(x) - 1)\frac{dv}{v}$ avec $M(x)$ une fonction à exprimer.
Conclure quant à l'utilité de la tuyère.

c-Déterminer le diamètre du col d_c pour que $v(x_c) = c$
Données : pour le Raptor de SpaceX, $d_s = 1{,}3$ m et vitesse de sortie $v_s = 3500$ m.s^{-1} ; $c = 1250$ m.s^{-1}

---

a-Ecoulement stationnaire => conservation du débit massique => $\rho v S = constante$

D'où en différentiant : $\boxed{\frac{dS}{S} + \frac{dv}{v} + \frac{d\rho}{\rho} = 0}$

b- $\frac{dS}{S} + \frac{dv}{v} + \frac{d\rho}{\rho} = 0$ => $\frac{dS}{S} = -\frac{dv}{v} - \frac{d\rho}{\rho}$

Or : $d\rho = \frac{dP}{c^2}$ Donc : $\frac{dS}{S} = -\frac{dv}{v} - \frac{dP}{\rho c^2}$

Equation d'Euler en projection selon Ox : $\rho v \frac{dv}{dx} = -\frac{dP}{dx}$ => $\frac{dP}{\rho} = -v dv$

D'où : $\frac{dS}{S} = -\frac{dv}{v} + \frac{v dv}{c^2}$

Soit : $\boxed{\frac{dS}{S} = \frac{dv}{v}(\frac{v^2}{c^2} - 1)}$ On a bien : $\frac{dS}{S} = (M^2(x) - 1)\frac{dv}{v}$ avec : $\boxed{M(x) = \frac{v}{c}}$ (nombre de Mach)

Avant le col : $\frac{dv}{v} > 0$ car le but de la tuyère est d'accélérer le fluide et $\frac{dS}{S} < 0$

Donc $\frac{v^2}{c^2} - 1 < 0$ => $v < c$ L'écoulement est subsonique

Au col : $\frac{dS}{S} = 0$ => $v = c$

Après le col : $\frac{dv}{v} > 0$ car le but de la tuyère est d'accélérer le fluide et $\frac{dS}{S} > 0$

Donc $\frac{v^2}{c^2} - 1 > 0$ => $v > c$ L'écoulement est supersonique

c-On a : $\frac{dS}{S} = \frac{v dv}{c^2} - \frac{dv}{v}$

On intègre entre la sortie et le col de la tuyère : $Ln\frac{S_c}{S_s} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{v_c^2 - v_s^2}{2}\right) - Ln\frac{v_c}{v_s}$

$$S_c = S_s \exp\left(\frac{1}{c^2}\left(\frac{v_c^2 - v_s^2}{2}\right) - Ln\frac{v_c}{v_s}\right)$$

$$S_c = S_s \frac{v_s}{v_c} \exp\left(\frac{1}{c^2}\left(\frac{v_c^2 - v_s^2}{2}\right)\right)$$

D'où : $d_c = d_s\sqrt{\frac{v_s}{v_c} \exp\left(\frac{1}{c^2}\left(\frac{v_c^2 - v_s^2}{2}\right)\right)}$

A.N : $d_c = 40$ cm
