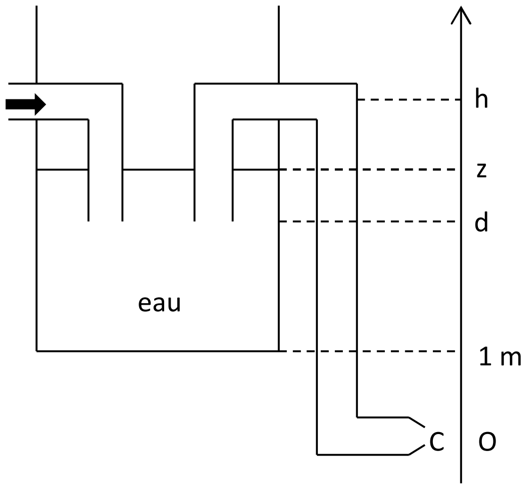
4.7.2 Bernoulli-Exercice 5

On considère un réservoir d'eau de section S.
L'eau entre dans le réservoir avec un débit D = 1litre/s.
L'eau peut aussi sortir du réservoir par une canalisation dont l'embout C est de section s << S.
On prend l'origine de l'axe vertical au niveau de C, on repère la surface d'eau par z. Le bas du réservoir est à 1m au-dessus de C. Le début de la canalisation est à la cote d.



a-Calculer le débit D_c au point C.

b-Calculer z_m pour que $D = D_c$.

c-Décrire qualitativement le mouvement de la surface.

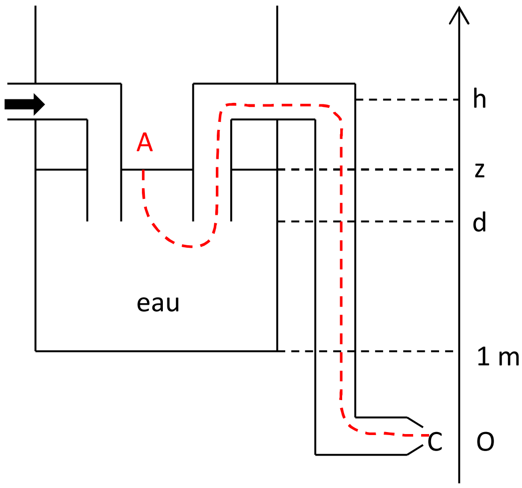
d-Donner le lien entre D_c, D et dz/dt.

e-Calculer le temps t_1 pour que $D_c = 0$ sachant que z = h à t = 0.

f-Calculer le temps t_2 pour que $D_c \neq 0$.

g-A.N : $s = 2\ cm^2$, d = 1,3 m , h = 1,4 m , $S = 1\ m^2$ (N.B : ce ne sont pas les valeurs d'origine)

4.7.2 Bernoulli-Exercice 5



a-On a : $D_C = sv(C)$

Ecoulement :
- d'un fluide homogène (eau)
- quasi-stationnaire (car s << S)
- parfait (car c'est de l'eau)
- incompressible (car c'est un liquide)

Pour calculer v(C) on applique la <u>relation de Bernoulli</u> à la ligne de courant AC :

$$P(A)+\frac{1}{2}\mu V^2(A)+\mu gz(A)=P(C)+\frac{1}{2}\mu V^2(C)+\mu gz(C)$$

On a : $P(A) = P_0$
$P(C) = P_0$ (jet libre)
$v(A) \approx 0$ (car $Sv(A) = sv(C)$ et $s << S$)

Donc $\mu gz=\frac{1}{2}\mu V^2(C)$ d'où : $v(C)=\sqrt{2gz}$

Finalement : $\boxed{D_C = s\sqrt{2gz}}$

b-$D = D_C$ => $\boxed{z_m=\frac{D^2}{2gs^2}}$

c-• $D = D_C$: Le niveau d'eau est stationnaire à l'altitude z_m
- • $D > D_C$: Le récipient se remplit plus qu'il ne se vide. Le niveau monte jusqu'au débordement.
- • $D < D_C$: Le récipient se remplit moins vite qu'il ne se vide.
  - le niveau baisse jusqu'à z = d
  - le siphon se désamorce : $D_C = 0$
  - le récipient se remplit jusqu'à ce que z = h
  - le siphon se réamorce : $D_C \neq 0 > D$ et on revient au début
  - => <u>le niveau oscille périodiquement</u> entre z = d et z = h

d-<u>Bilan du volume d'eau</u> dans le récipient entre t et t+dt :
volume à t+dt = volume à t + volume entrant pendant dt - volume sortant pendant dt

$Sz(t+dt) = Sz(t) + Ddt - D_Cdt$ => $S\frac{z(t+dt)-z(t)}{dt}=D-D_C$ => $\boxed{S\frac{dz}{dt}=D-D_C}$

e-On cherche le temps t_1 pour que z diminue de h à d.

$S\frac{dz}{dt}=D-D_C$ => $S\frac{dz}{dt}=D-s\sqrt{2gz}$ => $\frac{dz}{D-s\sqrt{2gz}}=\frac{dt}{S}$ en séparant les variables

On a : $\dfrac{dz}{1-\dfrac{s\sqrt{2gz}}{D}}=\frac{D}{S}dt$ Changement de variable : $u=\frac{s\sqrt{2gz}}{D}$ => $dz=\frac{D^2}{s^2g}udu$

L'équation différentielle devient : $\frac{udu}{1-u}=\frac{s^2g}{DS}dt$ => $\frac{u-1+1}{1-u}du=\frac{s^2g}{DS}dt$ => $\int_{u(h)}^{u(d)}\frac{du}{1-u}-\int_{u(h)}^{u(d)}du=\frac{s^2g}{DS}\int_0^{t_1}dt$

Soit : $\left[-Ln(1-u)\right]_{u(h)}^{u(d)}-(u(d)-u(h))=\frac{s^2g}{DS}t_1$ => $t_1=\frac{DS}{s^2g}\left[Ln\left(\frac{1-u(h)}{1-u(d)}\right)-(u(d)-u(h))\right]$

Finalement : $\boxed{t_1=\frac{DS}{s^2g}\left[Ln\left(\frac{D-s\sqrt{2gh}}{D-s\sqrt{2gd}}\right)-\frac{s\sqrt{2g}}{D}(\sqrt{d}-\sqrt{h})\right]}$ A..N : <u>t_1 = 4087 s</u>

f-Tant que z < h, le siphon ne fonctionne plus, on a $D_C = 0$ donc : $S\frac{dz}{dt}=D$

=> $z=\frac{D}{S}t+d$ (z = d à t = 0 nouvelle origine des temps) => $\boxed{t_2=\frac{(h-d)S}{D}}$ A.N : <u>t_2 = 100 s</u>
