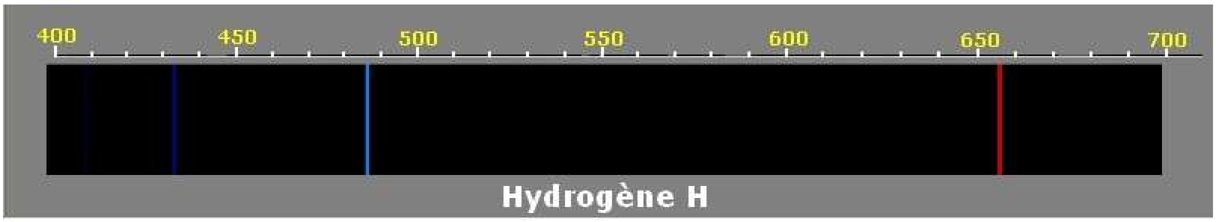
2.6 Forces centrales-Exercice 2

Spectre de l'atome d'hydrogène dans le domaine visible :



1-Comment obtenir le spectre d'une lampe à hydrogène ?

2-Quelle est la force appliquée à l'électron ?

3-Montrer que l'accélération de l'électron supposé en mouvement circulaire de rayon R s'écrit : $\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r$.
En déduire v^2.

4-Exprimer l'énergie potentielle de l'électron E_p. Montrer que son énergie mécanique E vérifie : $E = -E_c = \frac{E_p}{2}$.

5-On veut quantifier la vitesse v par un entier n. Calculer le moment cinétique L de l'électron.
On pose $L = n\hbar$. En déduire v_n en fonction de e, ε_0, $\hbar$ puis l'énergie mécanique E_n.

6-Calculer les fréquences des radiations émises par un électron passant d'un niveau n à un niveau p > n.
Interpréter l'allure du spectre ci-dessus sachant que n = 2.

On donne : $\hbar = h/2\pi = 1{,}05.10^{-34}$ J.s ; $m = 9{,}1.\ 10^{-31}$ kg ; $\varepsilon_0 = 8{,}84.10^{-12}$ F.m^{-1} ; $e = 1{,}6.10^{-19}$ C

1-Utilisation d'un système dispersif (prisme, réseau) pour séparer les longueurs d'onde.

2- $\boxed{\vec{F} = -e\vec{E} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r}$

3-Loi de la quantité de mouvement pour l'électron : $m\vec{a} = \vec{F}$
La force étant radiale, l'accélération sera aussi radiale.
La force étant centrale, le mouvement est plan. On se place dans le plan z = 0 et on utilise la base polaire.

On a alors : $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$. Or : $v = R\dot{\theta}$ donc : $\boxed{\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r}$

On a alors : $-m\frac{v^2}{R} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ d'où : $\boxed{v^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mR}}$

4- $E_p = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$; $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = -\frac{E_p}{2}$ donc : $\boxed{E = E_c + E_p = -E_c = \frac{E_p}{2}}$

5- $\boxed{L = mRv}$ Avec $L = n\hbar$, on trouve : $v_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 n\hbar}$ Puis : $E_n = -\frac{1}{2}mv_n^2$ soit $\boxed{E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2 n^2} = \frac{E_1}{n^2}}$

A.N : $E_1 = -2{,}18.10^{-18}$ J = -13,6 eV

6-Relation de Planck-Einstein : $E_p - E_n = h\nu = hc/\lambda$ D'où : $\boxed{\nu = \frac{E_1}{h}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right)}$

On a bien un spectre de raies car les fréquences sont quantifiées.
Pour n = 2 et p = 3 : $\lambda = 656$ nm (raie rouge) ; pour n = 2 et p = 4 : $\lambda = 485$ nm (raie bleue)
