

5.2.4 Condensateur-Exercice 1

On considère trois cylindres conducteurs coaxiaux de rayons respectifs R_1 , R_2 et R_3 avec $R_1 < R_2 < R_3$.
Un fil relie les cylindres de rayons R_1 et R_3 .

Calculer la capacité C du condensateur ainsi formé. R_1 et R_3 étant fixés, tracer $C(R_2)$ et commenter.

5.2.4 Condensateur-Exercice 1

Hypothèse : la hauteur h des cylindres est très grande devant les rayons, on les suppose infinis selon Oz

Par définition d'un condensateur, les armatures en regard portent des charges opposées : $Q_2 = -(Q_1 + Q_3)$

Par définition de la capacité : $Q_2 = C(V_2 - V_1)$

Pour évaluer $V_2 - V_1$, il faut calculer le champ $\vec{E}(M)$

On utilise la base et les coordonnées cylindriques d'axe Oz .

Invariances :

- Par translation selon Oz : $\vec{E}(M)$ ne dépend pas de z
- Par rotation autour de Oz : $\vec{E}(M)$ ne dépend pas de θ

Symétries :

- $\Rightarrow$ Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie des charges $\Rightarrow \vec{E}(M)$ appartient à ce plan
- $\Rightarrow$ Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie des charges $\Rightarrow \vec{E}(M)$ appartient à ce plan

Finalement : $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{u}_r$

On applique le théorème de Gauss en choisissant comme surface de Gauss (S) passant par M le cylindre fermé

d'axe Oz , de hauteur h , de rayon r :
$$\oiint_{(S)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}(M) = \frac{Q_{\text{int}}(S)}{\epsilon_0}$$

- Le flux est nul à travers les couvercles du cylindre car $\vec{E}(M)$ et $d\vec{S}(M)$ sont perpendiculaires.

$$\text{Il reste : } \oiint_{(S)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}(M) = \iint_{\text{surface latérale}} E_r(r) \vec{u}_r \cdot d\vec{S} \vec{u}_r = E_r(r) \iint_{\text{surface latérale}} dS = 2\pi r h E_r(r)$$

- Cas 1 : $R_1 < r < R_2$: $Q_{\text{int}}(S) = Q_1$

$$\text{Donc : } 2\pi r h E_r(r) = \frac{Q_1}{\epsilon_0} \quad \text{d'où : } E_r(r) = \frac{Q_1}{2\pi h \epsilon_0 r} \quad \text{puis : } \vec{E}(M) = \frac{Q_1}{2\pi h \epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

$$\text{Puis : } V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{2\pi h \epsilon_0 r} dr = \frac{Q_1}{2\pi h \epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow Q_1 = \frac{2\pi h \epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} (V_1 - V_2)$$

- Cas 2 : $R_2 < r < R_3$: $Q_{\text{int}}(S) = Q_1 + Q_2$

$$\text{Donc : } 2\pi r h E_r(r) = \frac{Q_1 + Q_2}{\epsilon_0} \quad \text{d'où : } E_r(r) = \frac{Q_1 + Q_2}{2\pi h \epsilon_0 r} \quad \text{puis : } \vec{E}(M) = \frac{Q_1 + Q_2}{2\pi h \epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

$$\text{Puis : } V_2 - V_3 = V_2 - V_1 = \int_{R_2}^{R_3} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_2}^{R_3} \frac{Q_1 + Q_2}{2\pi h \epsilon_0 r} dr = \frac{Q_1 + Q_2}{2\pi h \epsilon_0} \ln \frac{R_3}{R_2} \quad (V_3 = V_1 \text{ grâce au fil})$$

$$\text{Donc : } \frac{2\pi h \epsilon_0}{\ln \frac{R_3}{R_2}} (V_2 - V_1) = Q_1 + Q_2 = \frac{2\pi h \epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} (V_1 - V_2) + Q_2$$

$$\text{D'où : } \boxed{C = \frac{Q_2}{V_2 - V_1} = 2\pi h \epsilon_0 \left(\frac{1}{\ln \frac{R_3}{R_2}} + \frac{1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \right)}$$

