

5.4 Equations de Maxwell-Exercice 9

On considère un cylindre conducteur de conductivité γ , d'axe Oz, de rayon R, de hauteur $h \gg R$.

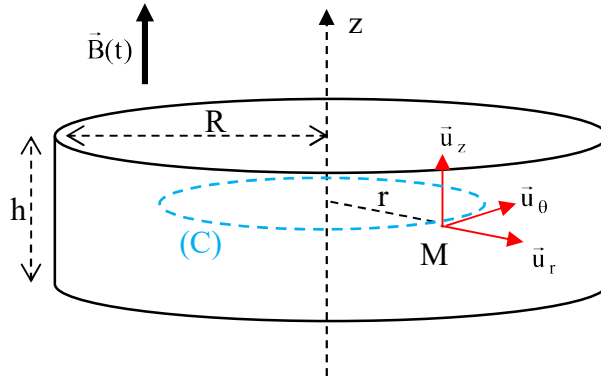
Il est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ uniforme.

a-Montrer qu'il apparaît un champ électrique $\vec{E}(M, t)$ dans le cylindre.

b-Justifier que $\vec{E}(M, t) = E_\theta(r, t) \vec{u}_\theta$ et déterminer $E_\theta(r, t)$

c-Déterminer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le cylindre.

a-Le champ \vec{B} variable induit un champ électrique \vec{E} d'après l'équation de Maxwell-Faraday $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$



b-Il y a invariance par rotation autour de Oz, on suppose aussi une invariance par translation selon Oz
 \Rightarrow Les champs ne dépendent que de r et de t.

Par analogie avec les propriétés de symétrie de \vec{B} et \vec{j} liés par l'équation de Maxwell-Ampère $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$:

le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie de \vec{B} , donc \vec{E} est perpendiculaire à ce plan : $\vec{E}(M, t) = E(r, t) \vec{u}_\theta$

On applique la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday au cercle (C) passant par M (rayon r) :

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \left(\iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) \Rightarrow \oint_{(C)} E(r, t) \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = -\frac{d}{dt} \left(\iint_{(S)} B(t) \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z \right) \Rightarrow 2\pi r E(r, t) = -\frac{d}{dt} (\pi r^2 B(t))$$

$$\text{Donc : } E(r, t) = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} = -\frac{r}{2} (-\omega B_0 \sin \omega t)$$

$$\text{Finalement : } \boxed{\vec{E}(M, t) = \frac{1}{2} r \omega B_0 \sin \omega t \vec{u}_\theta}$$

c-Ce champ électrique va agir sur les électrons libres du conducteur pour donner naissance à des courants induits, appelés courants de Foucault, de densité volumique $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ (loi d'Ohm locale).

$$\text{Puissance volumique dissipée par effet Joule : } p_v = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma \vec{E}^2 = \frac{1}{4} \gamma r^2 \omega^2 B_0^2 \sin^2 \omega t$$

$$\text{En moyenne temporelle : } \langle p_v \rangle = \frac{1}{8} \gamma r^2 \omega^2 B_0^2$$

$$\text{Puissance moyenne dissipée : } \langle P \rangle = \iiint_{\text{cylindre}} \langle p_v \rangle d\tau \quad \text{avec } d\tau = r dr d\theta dz$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{8} \gamma \omega^2 B_0^2 \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \frac{1}{8} \gamma \omega^2 B_0^2 \cdot \frac{R^4}{4} \cdot 2\pi \cdot h$$

$$\text{Finalement : } \boxed{\langle P \rangle = \frac{\pi}{16} \gamma \omega^2 B_0^2 \cdot R^4 \cdot h}$$