

---

## PROBABILITÉS

*Épreuves orales*

---

### I. FAMILLES SOMMABLES

**1** *Mines-Télécom MP*  
Calculer  $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(1+p+q^2)}$ .

**2** *TPE-EIVP MP*  
Calculer  $\sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(p+q)^2}$  puis  $\sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2+q^2}$ .

### II. FONCTIONS GÉNÉRATRICES

**3** *CCINP MP (exercice 96)*

Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On effectue  $n$  tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.

On note  $S_n$  la somme des numéros tirés.

Soit  $t \in [-1, 1]$ . Déterminer  $G_{S_n}(t)$  où  $G_{S_n}$  désigne la fonction génératrice de  $S_n$ .

En déduire la loi de  $S_n$ .

**4** *Centrale*

Soit  $p \in ]0, 1[$ . On considère des cellules susceptibles de se diviser en deux (avec une probabilité  $p$ ) ou de mourir (avec une probabilité  $1 - p$ ).

On suppose qu'il y a exactement une cellule à la génération 0.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $X_n$  la variable aléatoire égale au nombre de cellules à la génération  $n$ . En particulier, la variable aléatoire  $X_0$  vaut 1.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $g_n$  la fonction génératrice de  $X_n$ .

1. Déterminer les lois de  $X_1$  et  $X_2$ .
2. Déterminer l'univers image  $X_n(\Omega)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $t \in [0, 1]$ , montrer l'égalité  $g_{n+1}(t) = g_n(g_1(t))$ .

### III. COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES

#### 5 Mines-Ponts/CCINP

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux la loi géométrique de paramètre  $p$ . On souhaite déterminer la loi de  $V = \min(X, Y)$ .

1. On pose  $U = \max(X, Y)$ . Déterminer la loi conjointe du couple  $(U, V)$ .  
En déduire que  $V$  suit une loi usuelle que l'on déterminera.
2. Calculer  $P(X > n)$  puis  $P(V > n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Retrouver la loi de  $V$ .

#### 6 CCINP MP (exercice 108)

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

On suppose que la loi du couple  $(X, Y)$  est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{e^{2i+1} j!}.$$

1. Déterminer les lois de  $X$  et  $Y$ .
2. (a) Prouver que  $1 + X$  suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de  $X$ .  
(b) Déterminer l'espérance et la variance de  $Y$ .
3. Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
4. Calculer  $P(X = Y)$ .

#### 7 Centrale

Une urne contient des boules noires et des boules blanches dans une proportion  $p \in ]0, 1[$  pour les boules noires. On réalise des tirages avec remise. On note  $X$  la longueur de la première suite de boules de la même couleur,  $Y$  la longueur de la seconde suite.

Par exemple, si on tire *blanche, blanche, noire, noire, noire, blanche...* alors  $X$  prend la valeur 2 et  $Y$  la valeur 3.

Par convention, on note  $[X = 0]$  l'événement « la première suite ne s'arrête jamais » et  $[Y = 0]$  l'événement « la seconde suite ne s'arrête jamais ».

1. Pour tout  $(k, h) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , écrire l'événement  $(X = k, Y = h)$  comme réunion de deux événements disjoints et en déduire sa probabilité.
2. Déterminer la loi de  $X$  et calculer son espérance.
3. Déterminer la loi de  $Y$  et calculer son espérance.

#### 8 Mines-Ponts

Soit  $N$  une variable aléatoire suivant une loi géométrique.

On tire  $N$  fois une boule avec remise dans une urne contenant une boule bleue et une boule verte.

On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de boules bleues tirées.

1. Reconnaître la loi de  $X$  sachant  $[N = n_0]$  pour  $n_0 \in \mathbb{N}^*$ .
2. Soit  $m \in \mathbb{N}$ . Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière  $\sum_{n \geq m} \binom{n}{m} x^n$ .

3. Déterminer la loi de  $X$ .
4. La variable  $X$  admet-elle une espérance ? Si oui, la déterminer.

**9** *Mines-Télécom*

Soit deux variables aléatoires discrètes  $S$  et  $N$ .

La variable  $N$  représente le nombre de particules de fumée dans une pièce. On suppose que  $N$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , où  $\lambda > 0$ .

La variable  $S$  représente le nombre de particules détectées par un détecteur de fumée.

Chaque particule a une probabilité  $p$  d'être détectée, où  $p \in ]0, 1[$ .

1. Déterminer la loi de  $S$  conditionnellement à l'événement  $(N = n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .  
En déduire la loi de  $S$ .
2. Déterminer la loi suivie par  $N - S$ .  
Montrer que  $S$  et  $N - S$  sont indépendantes.
3. Les variables  $N$  et  $S$  sont-elles indépendantes ?

**10** *Centrale*

On prend une pièce avec la probabilité  $p \in ]0, 1[$  de faire pile.

On réalise une première série de lancers où l'on s'arrête à partir du premier côté pile et on pose  $N$  la variable aléatoire qui donne son rang.

On lance la pièce  $N$  fois pour la deuxième série et on note  $X$  la variable aléatoire qui donne le nombre de *pile* obtenus pendant cette série.

1. Donner la loi du couple  $(N, X)$ .
2. Déterminer la loi de  $X$ .
3. Soit  $\lambda \in ]0, 1[$ . On pose  $U \sim \mathcal{B}(\lambda)$  et  $V \sim \mathcal{G}(\lambda)$  des variables aléatoires indépendantes.  
On pose également  $Y = UV$ .  
Déterminer une condition sur  $\lambda$  pour que  $X$  et  $Y$  aient la même loi.
4. Déterminer l'espérance de  $X$ .

**11** *Centrale*

Une ligne de métro, sur laquelle un train va et vient, compte 4 arrêts.

Le train met une minute pour aller d'une station à l'autre et s'y arrête pendant un temps négligeable.

Un voyageur fatigué monte à la station 0 au temps  $t = 0$  et s'endort.

On note  $T$  la variable aléatoire égale au temps qu'il met à se réveiller et  $X$  la variable aléatoire égale au numéro de la station où il se réveille.

On suppose que  $T$  suit une loi géométrique.

Déterminer la loi de  $X$ .

**12** *EIVP*

On donne  $n$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  indépendantes suivant toutes la loi  $\mathcal{B}(p)$ .

Donner les lois de  $Y = \prod_{k=1}^n X_k$ ,  $W = \max_{1 \leq k \leq n} X_k$  et  $Z = \max_{1 \leq k \leq n-1} (X_{k+1} - X_k)$ .

#### IV. ESPÉRANCE, VARIANCE, COVARIANCE

##### 13 Mines-Ponts

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

1. Calculer  $E\left(\frac{1}{X+1}\right)$ .
2. Quelle est la probabilité que  $X$  prenne une valeur paire ? impaire ?

##### 14 Mines-Télécom / CCINP MP (exercice 99)

Soit  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes, de même loi et possédant un moment d'ordre 2.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ .

1. Montrer que pour tout  $a > 0$ ,  $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geq a\right) \leq \frac{V(Y_1)}{na^2}$ .
2. On tire avec remise une boule parmi deux rouges et trois noires. Quand a-t-on au moins 95% de chance d'avoir une proportion de boules rouges tirées comprise entre 0,35 et 0,45 ?

##### 15 CCINP

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $Y_n = X_n + X_{n+1}$  et  $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ .

1. Calculer  $E(S_n)$  et  $V(S_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
2. Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2p\right| \geq \varepsilon\right) = 0$ .

##### 16 Centrale

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $[-1, 1]$  et d'espérance nulle. Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que  $X$ . On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Soit  $a > 0$ .

1. Montrer que pour tout  $\lambda > 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$P(|S_n| \geq a) \leq e^{-\lambda a} \left( (E(e^{\lambda X}))^n + (E(e^{-\lambda X}))^n \right).$$

2. Justifier que pour tout  $(t, x) \in \mathbb{R} \times [-1, 1]$ ,  $e^{tx} \leq \frac{1}{2}(1-x)e^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)e^t$ .  
En déduire que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $E(e^{tX}) \leq e^{t^2/2}$ .
3. En déduire une majoration de  $P(|S_n| \geq a)$ .

##### 17 X-ESPCI

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi.

On suppose que  $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$  et  $X$  admet une espérance.

Montrer que  $E\left(\frac{X}{Y}\right) \geq 1$ .

**18** Centrale

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $P(X_n = -1) = p$  et  $P(X_n = 1) = 1 - p$  avec  $p \in [0, 1]$ .

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $Z_n = X_1 X_2 \dots X_n$  et  $a_n = P(Z_n = -1)$ .

1. Exprimer  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$  et en déduire  $a_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
2. Calculer l'espérance de  $Z_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
3. Calculer la covariance de  $Z_n$  et  $Z_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
Donner  $\text{Cov}(Z_1, Z_2)$ . Qu'en déduit-on ?

**19** Centrale/CCINP/ENS

Soit  $p$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_p$  admettant une variance.

On note  $C = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{(i,j) \in [1,p]^2}$  la matrice des covariances.

1. Soit  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ . Montrer que  $V\left(\sum_{k=1}^d u_k X_k\right) = u^\top C u$ .
2. Montrer que  $C$  est diagonalisable à valeurs propres positives.
3. Montrer que l'application qui à  $u$  associe  $V\left(\sum_{k=1}^d u_k X_k\right)$  est continue.
4. Montrer qu'elle admet sur la boule unité fermée (pour la norme euclidienne) un maximum  $L$  que l'on calculera.

## V. CHAÎNE DE MARKOV

**20** CCINP

On dispose de deux urnes  $U_1$  et  $U_2$  et de deux jetons. Initialement, les deux jetons sont placés dans les urnes, l'une pouvant être vide. On choisit aléatoirement l'une des deux urnes. Si elle n'est pas vide, on prend un jeton de cette urne que l'on remplace aléatoirement dans une des deux urnes et si elle est vide, on fait la même opération sur l'autre urne.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $X_n$  la variable aléatoire représentant le nombre de jetons dans  $U_1$  au bout de  $n$  tirages.

On note pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$ . On pose  $U_0 = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$ .

1. (a) Donner une base du noyau de  $A$  et en déduire une valeur propre.  
(b) Montrer que  $A$  admet trois valeurs propres distinctes  $a < b < c$  et qu'elle est diagonalisable.  
(c) Trouver un vecteur propre associé à  $c$ .  
(d) On admet que  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre associé à  $b$ . Donner une matrice  $P$  dont la première ligne ne comporte que des 1 et telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale.
2. (a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} = AU_n$  et en déduire la loi de  $X_n$ .

(b) Justifier que  $(U_n)$  admet une limite  $\begin{pmatrix} \ell_0 \\ \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix}$ .

Reconnaitre la loi de la variable aléatoire  $X$  vérifiant  $\forall k \in \{0, 1, 2\}, P(X = k) = \ell_k$ .

## VI. MODÉLISATION

**21** *Mines-Ponts*

Soit  $p \in ]0, 1[$  et  $r \in \mathbb{N}^*$ . On lance une pièce qui a une probabilité  $p$  de faire pile et on note  $X$  la variable aléatoire qui donne le rang du lancer au cours duquel on obtient le  $r$ ème pile.

Déterminer la loi de  $X$ .

**22** *Mines-Ponts*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une machine met  $n$  pièces dans  $n$  boîtes, chaque pièce pouvant aller dans chaque boîte de manière équiprobable.

Quelle proportion de boîtes vides en moyenne aura-t-on si  $n$  est très grand ?

**23** *Centrale*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une urne contient  $n$  boules blanches et  $n$  boules noires.

Calculer le nombre de tirages moyen nécessaires pour tirer sans remise toutes les boules blanches.

**24** *ENS*

Soit  $p \in ]0, 1[$ .

On dispose d'une pièce pour laquelle la probabilité de faire face est  $p$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $A_n$  l'événement « il n'y a jamais eu deux *face* de suite en  $n$  lancers ».

Donner un équivalent de  $P(A_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**25** *X-ESPCI*

Cinq personnes sont assises autour d'une table. Deux d'entre elles, voisines, détiennent chacune un ballon. À chaque tour, chaque personne lance son ballon à son voisin de gauche ou de droite avec la même probabilité  $\frac{1}{2}$ .

Le jeu s'arrête quand l'un des convives reçoit les deux ballons.

Déterminer le nombre moyen de tours nécessaires pour que le jeu s'arrête.

## VII. PLUS THÉORIQUES

**26** *CCINP*

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sur cet espace probabilisé, indépendantes et de loi  $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ .

Pour tout  $\omega \in \Omega$ , on pose  $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 0 \\ 2 & Y(\omega) \end{pmatrix}$ .

On introduit les événements  $A = \{M \text{ est inversible}\}$  et  $B = \{M \text{ est diagonalisable}\}$ .

Calculer  $P(A)$  et  $P(B)$ .

**27** CCINP

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sur cet espace probabilisé, indépendantes,  $X$  suit la loi  $\mathcal{B}(n, p)$  et  $Y$  suit la loi  $\mathcal{U}([0, n])$ .

On pose pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } X(\omega) \neq 0 \\ Y(\omega) & \text{si } X(\omega) = 0 \end{cases}$

Déterminer la loi de  $Z$ .

**28** Mines-Ponts

On considère une suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \geq 1}$  identiquement distribuées selon une loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ , définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

On pose l'événement  $A = \{\omega \in \Omega, \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \text{ converge}\}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ .

1. Calculer  $P(A)$  pour  $\alpha > 1$ .

On se place maintenant dans le cas où  $\alpha \in ]0, 1[$  et on pose  $\beta = 1 - \alpha$ .

2. (a) Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $P\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} (X_n > n^\beta)\right) \leq \sum_{n=k}^{+\infty} q^{n^\beta}$  où  $q = 1 - p$ .

(b) Étudier la série de terme général  $q^{n^\beta}$ .

(c) En déduire  $\lim_{k \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} (X_n > n^\beta)\right)$ .

(d) En déduire  $P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} (X_n > n^\beta)\right)$ .

3. On pose l'événement  $A_\beta = \{\omega \in \Omega, X_n(\omega) > n^\beta \text{ est vraie pour un nombre fini d'entiers naturels } n\}$ .

(a) Montrer que  $A_\beta = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k}^{+\infty} (X_n \leq n^\beta)$ .

(b) Montrer que  $P(A_\beta) = 1$ .

(c) Montrer que si  $\omega \in A_\beta$  alors la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)}$  diverge.

4. Quelle est la probabilité de l'événement  $A$  ?

**29** X-ESPCI

On dit qu'une suite de variables aléatoires discrètes  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est intransient lorsque pour toute partie  $A$  bornée de  $\mathbb{R}$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y_n \in A)$  est finie.

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables indépendantes telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_n$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\frac{\alpha}{n}$  (avec  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ ).

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k$ .

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $\alpha$  pour que la suite  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit intransient.