Attention :

- Justifiez tous vos résultats, commentez les applications numériques si cela vous semble pertinent.
- Tout résultat non justifié sera systématiquement considéré comme faux.
- Soignez la présentation : faites de belles figures, encadrez les résultats, aérez votre copie.
- Les résultats non homogènes seront sanctionnés.

Souvenirs du DS5 et du DS6...

Q1 1. Vous observez en mode XY les deux signaux $u_e = E\cos(\omega t)$ et $u_s = S\cos(\omega t + \varphi)$. Que voyez-vous à l'écran si $\varphi = 0$? si φ est quelconque ?

Q2 2. Comment est alimenté un ALI ?

Q3 3. Souhaitez tracer le diagramme de Bode d'un filtre. Quelles mesures effectuez-vous ? Que calculez-vous ? Comment doivent être répartis les points de mesure ?

Q4 4. Expliquez comment vous mesurez un déphasage entre deux tensions synchrones. *On s'appuiera sur un schéma, on détaillera les mesures à effectuer et les calculs pour conclure.*

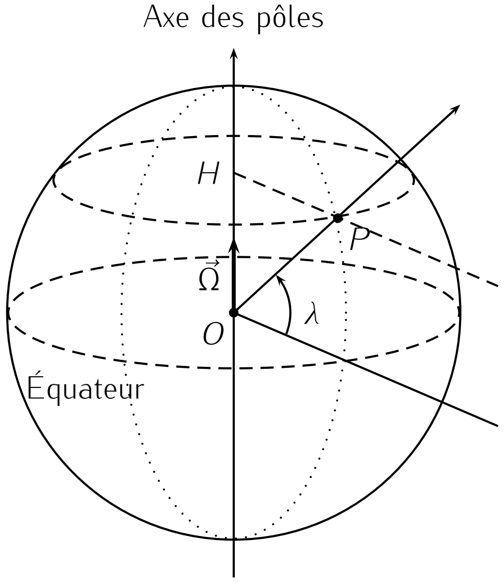
Terre errante

La nouvelle *Terre errante* de l'auteur Liu Cixin évoque l'hypothèse que le Soleil risque d'exploser et de devenir une supernova à moyen terme. Face au risque, l'humanité décide d'instituer un gouvernement mondial puis de modifier la trajectoire de la planète de façon à la diriger vers l'étoile la plus proche, Proxima du Centaure. La tâche est ardue et prend plusieurs siècles d'efforts. La nouvelle commence au moment de l'opération consistant à freiner la planète sur sa trajectoire pour la propulser vers Proxima du Centaure, et se termine lorsqu'elle quitte le système solaire, au moment où le Soleil devient effectivement une supernova. L'auteur prend, comme témoin des événements qui se déroulent sur Terre, un Chinois, dont on suit la vie depuis son enfance (lorsque la Terre est freinée de sa trajectoire) jusqu'à son grand âge (lorsque la Terre quitte le système solaire).

1 L'ère du freinage

Le premier chapitre détaille le freinage de la rotation de la Terre autour de son axe Nord-Sud. Au total, 12 000 propulseurs sont installés dans les plaines américaines et asiatiques. Chaque engin émet un gigantesque jet de plasma qui exerce en retour une force $\vec{F}$ sur la Terre et colinéaire au jet.

On modélise la Terre par une sphère homogène de rayon $R_T = 6400$ km et de masse $M = 6.10^{24}$ kg dans le référentiel géocentrique qu'on supposera galiléen. Elle tourne à la vitesse angulaire $\Omega > 0$ autour de l'axe des pôles supposé fixe dans le référentiel d'étude. Tous les propulseurs sont installés sur le 45ième parallèle, *i.e.* $\lambda = 45°$ (voir le schéma ci-après).



Q5 1. On repère la position d'un propulseur P par ses **coordonées cylindriques** d'axe (Oz) l'axe Sud-Nord. En supposant que la force $\vec{F}$ soit horizontale et orientée selon l'axe Est-Ouest (c'est-à-dire selon $-\vec{e}_\theta$). Faire un schéma. Exprimer la distance HP en fonction de R_T et λ.

Q6 2. Montrer que le moment du couple exercé par les $N = 12000$ propulseurs autour de l'axe (Oz) des pôles vaut $\gamma = -\frac{N}{\sqrt{2}}R_T F$.

Q7 3. Le moment d'inertie de la Terre autour de son axe de rotation est $J = \frac{2}{5}MR_T^2$. Appliquer le théorème du moment cinétique à la Terre.

Q8 4. Avant l'allumage des moteurs, la Terre possède une période de rotation T_S =23h 56min 4s. Montrer que la Terre ne tourne plus sur elle-même à l'instant T telle que

$$\frac{2\pi}{T_S} = \frac{N}{\sqrt{2}}\frac{R_T F}{J}T$$

Q9 5. Dans le récit, il est dit que l'humanité met 250 ans pour stopper la rotation de la Terre. En déduire que chaque propulseur exerce une force d'environ 17.10^{12} N.

6. Il est également précisé qu'un propulseur exerce une poussée de quinze milliards de tonnes.

Q10 (a) Convertir cette donnée en Newton.

Q11 (b) Comparer la force trouvée en Q5 avec celle de Q6a. Qu'est-ce que cela implique sur l'orientation des propulseurs ?

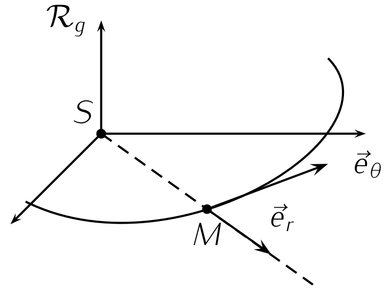
Q12 (c) Donner l'expression l'angle α que fait un propulseur avec le vecteur $\vec{e}_r$. Faire l'application numérique, comparer avec l'illustration et commenter.

2 L'ère de la fuite

À la fin de l'ère du freinage, la Terre ne tourne plus sur elle-même, mais elle décrit toujours une orbite circulaire autour du Soleil de masse $M_S = 2.10^{30}$ kg à la distance $R_0 = 150.10^6$ km. On rappelle que la constante de gravitation vaut $\mathcal{G} = 6{,}67.10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}

Q13 1. Justifier que lorsqu'on étudie le mouvement de la Terre autour du Soleil, celle-ci peut-être assimilée à un point matériel.

Q14 2. On repère à nouveau la Terre à l'aide des coordonnées cylindriques, mais cette fois-ci, de centre S, le Soleil.



On rappelle que le Soleil exerce une force $\vec{F} = -\mathcal{G}\frac{MM_S}{SM^3}\overrightarrow{SM}$ sur la Terre. Montrer que le moment cinétique de la Terre autour du Soleil est constant. En déduire que le mouvement est plan.

Q15 3. Montrer que le produit $r^2\dot{\theta}$, où $r = SM$ et $\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire de la Terre, est une constante que l'on notera C.

Q16 4. La force $\vec{F}$ est-elle conservative ? Si oui, donner l'expression de l'énergie potentielle associée.

Q17 5. Exprimer l'énergie mécanique de la Terre sous la forme $E_m = E_{p,eff} + \frac{1}{2}M\dot{r}^2$, où $E_{p,eff}$ ne dépend que de la variable r.

Q18 6. Tracer l'allure de $E_{p,eff}$ en fonction de r. Pour quelles valeurs de E_m la Terre possède-t-elle un mouvement lié ?

Q19 7. Montrer que dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon R_0 la vitesse de la Terre est $v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R_0}}$. Faire l'application numérique.

Q20 8. Toujours dans le cas d'un mouvement circulaire, montrer que $E_m = -\frac{\mathcal{G}M_SM}{2R_0}$.

Q21 9. En supposant que la vitesse de la Terre passe subitement de v_0 à v, quelle doit être la variation minimale de vitesse $\Delta v = v - v_0$ pour que celle-ci se trouve dans un état de diffusion ?

Q22 10. L'accélération subie par la Terre lors de ce processus vaut, en ordre de grandeur, $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, avec $\Delta t = 1$ jour. En déduire la force que doivent exercer les propulseurs sur la Terre et montrer que ce n'est pas compatible avec la valeur fournie au chapitre précédent.

11. Effectivement, on lit au début de ce chapitre « *Contrairement à ce que tu imagines peut-être, les propulseurs terrestres ne sont pas si puissants que ça. Ils ne sont capables de produire qu'une petite accélération, ils ne peuvent pas exercer une poussée suffisante pour projeter la Terre hors de l'orbite solaire. Avant de pouvoir fuir le Soleil, la Terre va tourner encore quinze fois sur son orbite ! Et c'est pendant ces quinze révolutions qu'elle va progressivement prendre de la vitesse. Aujourd'hui quand la Terre tourne autour du Soleil, elle fait presque un cercle parfait, mais au fur et à mesure de son accélération, ce cercle va se distordre, de plus en plus...* ».

On fait l'hypothèse que les propulseurs fournissent une puissance $\mathcal{P} = 7.10^{17}$ W constante à la Terre, ainsi

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}$$

Q23 Comme les propulseurs ont une influence minime sur le mouvement de la Terre, on peut supposer que la relation $E_m(t) = -\frac{\mathcal{G}M_SM}{2a(t)}$, où a est le demi-grand axe de la trajectoire, reste valable[1]. Montrer que

$$a(t) = \frac{R_0}{1 - \frac{2R_0\mathcal{P}}{\mathcal{G}M_SM}t}$$

1. On fait ici ce que l'on appelle en physique un traitement perturbatif.

Q24 12. Au bout de combien de temps la Terre aura-t-elle quitté l'orbite du Soleil ? Cette durée est-elle cohérente avec le récit ?

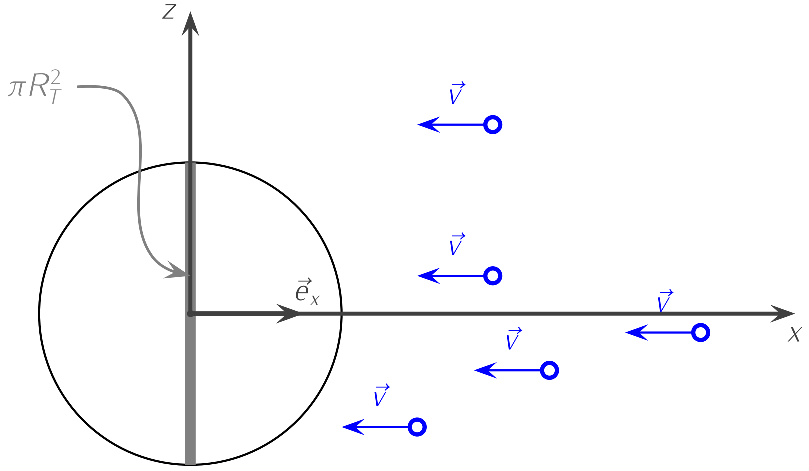
3 Ère de l'errance

Peu de temps après la mise en état de diffusion de la Terre, le Soleil explose et devient supernova, comme les astronomes l'avaient prévu quelques siècles auparavant. La Terre se dirige à vitesse constante vers Proxima du centaure située à 4,244 années lumière, elle l'atteindra dans 2500 ans.

Q25 1. À quelle vitesse v (en km/s) voyage la Terre ?

2. Aux confins du système solaire se trouve un vaste ensemble sphérique constitué d'un grand nombre de petits corps, appelé le nuage d'Oort. Ce nuage a la forme d'une coquille sphérique centrée sur le Soleil et possède une épaisseur $e = 10^{13}$ km. Lorsque la Terre se déplace au sein du nuage d'Oort, les corps répartis aléatoirement entrent en collision avec notre planète. On suppose que tous ces corps ont une même vitesse relative, v, par rapport à la Terre. On peut se contenter d'un modèle à une dimension, et on supposera que toutes les particules du nuage d'Oort ont le même vecteur vitesse dans le référentiel lié à la Terre : $\vec{v} = -v\vec{e_x}$. On notera $n^\star$ le nombre de particules par unité de volume, on négligera leur taille par rapport à la taille de la Terre. De plus, on négligera les interactions gravitationnelles.

Reproduire et compléter le schéma ci-dessous en représentant le volume contenant les corps entrant en collision avec la Terre entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$.



Q26 3. Combien de particules entrent en collision avec la Terre entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$? On exprimera $\mathrm{d}N_{coll}$ en fonction de $n^\star$, R_T (le rayon de la Terre), $\mathrm{d}t$ et v.

Q27 4. On suppose que les particules du nuage d'Oort ont une masse m, et que lors des collisions, elles se collent à la Terre. Quelle est la variation de quantité de mouvement d'une particule lors de son choc avec la Terre ?

Q28 5. Exprimer la force exercée par la Terre sur les particules entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$.

Q29 6. Montrer que la force exercée par les particules sur la Terre s'apparente à une force de frottement fluide du type $\vec{f} = -\beta v^2 \vec{e}_x$.

Q30 7. On souhaite connaître la vitesse de la Terre à la sortie du nuage d'Oort. On doit donc résoudre l'équation différentielle suivante :

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\beta v^2$$

avec $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. On souhaite résoudre ce système d'équation différentielle grâce à l'outil numérique via la méthode d'Euler. On rappelle qu'un développement de Taylor Young à l'ordre 1 donne :

$$v(t + \mathrm{d}t) = v(t) + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

et

$$x(t + \mathrm{d}t) = x(t) + v\mathrm{d}t$$

Recopier et compléter le script ci-dessous pour trouver la valeur de la vitesse de la Terre à la sortie du nuage.

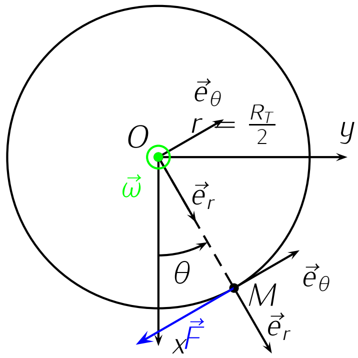
```
M = 6e24 #masse de la Terre en kg
beta = 1e7 #coeff de frottement en kg/m
x = 0    #position initiale de la Terre
dt = 10  #pas de temps en s
e = 1e13 #épaisseur du nuage en m

while ... :
    v = ... #calcul v(t+dt)
    x = ... #calcul de x(t+dt)
print(v)
```

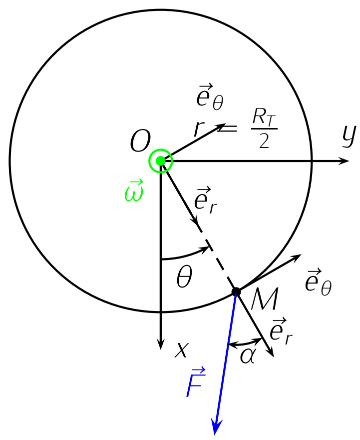
Q31 8. On trouve une variation relative de vitesse de $1{,}7.10^{-3}$%. De quelle durée est rallongée le voyage ?

Terre errante

1 L'ère du freinage



1. Les propulseurs décrivent un cercle de rayon $r = R_T \cos(\lambda) = \frac{R_T}{\sqrt{2}}$.
2. Le bras de levier de la force d'un propulseur autour de l'axe des pôles est $\frac{R_T}{\sqrt{2}}$, donc le moment exercé par un propulseur est $-\frac{R_T}{\sqrt{2}}F$ car $\vec{F}$ est orienté selon $-\vec{e}_\theta$. Comme il y a N propulseurs alors
$$\gamma = -N\frac{R_T}{\sqrt{2}}F$$
3. La Terre est uniquement soumise à l'action des propulseurs, le théorème scalaire du moment cinétique donne
$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \gamma = -N\frac{R_T}{\sqrt{2}}F$$
4. On intègre la relation précédente pour trouver :
$$\omega(t) = -N\frac{R_T}{\sqrt{2}}Ft + \omega_0$$
où $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_s}$. La terre arrête de tourner à l'instant T tel que $\omega(T) = 0$ soit
$$\frac{2\pi}{T_S} = \frac{N}{\sqrt{2}}\frac{R_T F}{J}T$$
5. On isole F dans la relation précédente :
$$F = \frac{2\sqrt{2}\pi J T}{N R_T T_S} = 17.10^{12}\ \mathrm{N}$$
6. (a) Pour convertir cette donnée en Newton, il suffit de convertir la masse en kg puis de la multiplier par g, on trouve 15.10^{13} N.
   (b) On trouve une force 10 fois plus intense que celle trouvée précédemment. Pour que les données soient compatibles, il faut réduire le moment du couple et donc réduire le bras de levier. On en déduit que les propulseurs ne sont pas colinéaires à $\vec{e}_\theta$.



(c)
La bras de levier de la force F est désormais $\sin(\alpha)\,\frac{R_T}{\sqrt{2}}$.
En reprenant l'égalité trouvée à la question 4, on obtient :

$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}\pi J}{NR_T T_S F T}$$

Ainsi, avec $F = 15.10^{13} N$ on trouve un angle α de 6°. Cela semble être en accord avec l'illustration sur laquelle les réacteurs sont quasiment verticaux. Sauf que... il ne faut pas oublier que les propulseurs sont sur le 45$^{\text{ième}}$ parallèle et que si la force qu'ils exercent est selon $\vec{e}_\theta$ alors, ils doivent être orientées à 45° par rapport au sol dans le plan contenant P et l'axe Nord-Sud.

2 L'ère de la fuite

1. Le rayon de la Terre est petit devant la distance Terre-Soleil on peut donc assimiler la Terre à un point matériel.
2. Si on travaille dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$, par application du TMC,

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{\mathcal{R}_g} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM}edge\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_O = \overrightarrow{Cte} = m.\vec{r}_0 \wedge \vec{v}_0 = m.\vec{C}$$

en posant $\vec{C} = \vec{r}_0 \wedge \vec{v}_0 = r^2\dot{\theta}$, la constante des aires.

3. Comme $\vec{L}_O = m.\vec{C}$ garde une direction fixe, celle de $\vec{r}_0 \wedge \vec{v}_0$, le plan $(\overrightarrow{0M}, \vec{v})$ reste orthogonal à cette direction fixe et le mouvement est plan.
4. Calculons le travail élémentaire de la force de gravitation $\vec{F}$:

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F}.d\vec{r} = -\frac{\mathcal{G}M_S M}{r^2}\vec{e}_r.(dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta) = -\frac{\mathcal{G}M_S M}{r^2}dr = -dE_p \qquad \text{avec } E_p = -\frac{\mathcal{G}M_S M}{r}$$

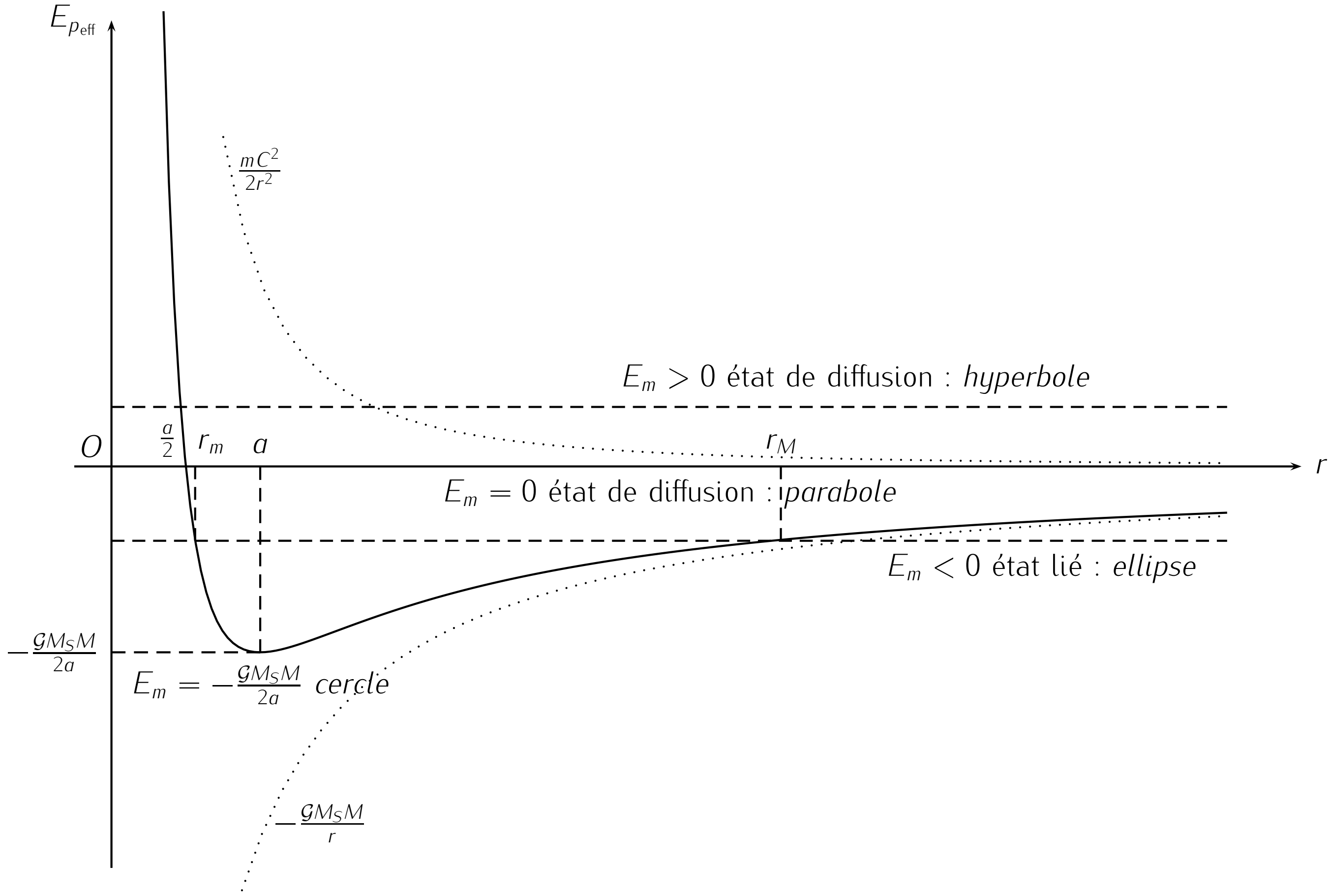
si on prend $E_p(r \to \infty) = 0$ puisque il n'y a plus d'interaction si M trop loin de O.
$\vec{F}$ est conservative et $E_m = Cte$ ne dépend que des CI.

5.

$$E_m(M/\mathcal{R}_g) = Cte = E_m = E_c + E_p(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2) + E_p(r) = E_{p_{\text{eff}}} + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \qquad \text{avec}$$

$$E_{p_{\text{eff}}} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + E_p(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r) \iff E_{p_{\text{eff}}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G}M_S M}{r}$$

6. On obtient l'allure de $E_{p_{\text{eff}}}$ suivante :

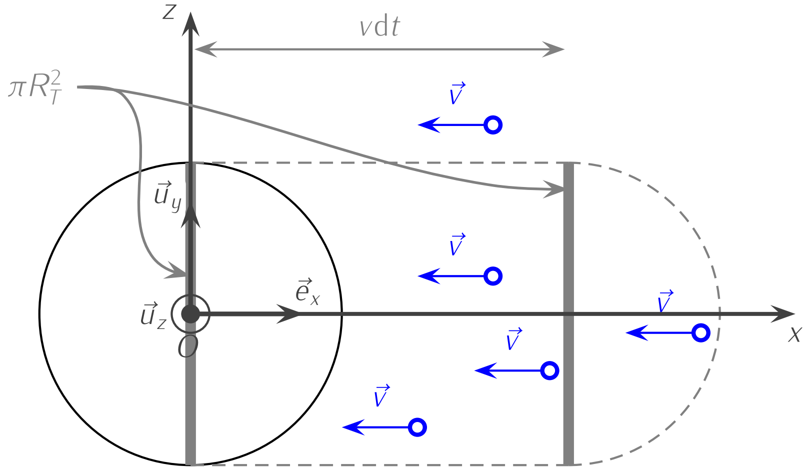


Le mouvement est lié si $E_m < 0$

7. Si la trajectoire est circulaire alors $\dot{\theta}$ est constant (car $C = R_0^2\dot{\theta}$ est constant) et donc le mouvement est uniforme. Ainsi,
$$\vec{a} = -\frac{v_0^2}{R_0}\vec{e}_r = \frac{\vec{F}}{m} = -\mathcal{G}\frac{M_S}{R_0^2}\vec{e}_r \Rightarrow v_0 = \sqrt{\mathcal{G}\frac{M_S}{R_0}}$$
8. Pour un mouvement circulaire $E_c = \frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{\mathcal{G}M_SM}{2R_0}$ ainsi $E_m = E_c + E_p = -\frac{\mathcal{G}M_SM}{2R_0}$.
9. Pour faire passer la Terre dans un état de diffusion, il faut $E_m \geq 0$ soit $\frac{1}{2}Mv^2 - \frac{\mathcal{G}MM_S}{R_0} \geq 0$. Ainsi, la vitesse minimale que l'on doit communiquer à la Terre est $v = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}MM_S}{R_0}}$. Numériquement, on trouve $\Delta v = 12{,}3$ km.s^{-1}.
10. Numériquement $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0.14$ m.s^{-2}. On trouve la force à appliquer pour communiquer cette accélération à l'aide de la seconde loi de Newton : $F = ma$ donc $F = 8{,}6.10^{23}$ N. C'est bien plus grand que la force des 12000 propulseurs.
11. Le théorème de la puissance mécanique appliqué à la Terre donne $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P} = cste$ soit $E_m = E_m(t=0) + \mathcal{P}t = -\frac{\mathcal{G}MM_S}{2R_0} + \mathcal{P}t$, or $E_m = -\frac{\mathcal{G}MM_S}{a(t)}$ donc $-\frac{\mathcal{G}MM_S}{2a(t)} = -\frac{\mathcal{G}MM_S}{2R_0} + \mathcal{P}t$, en isolant a, on trouve :
$$a(t) = \frac{R_0}{1 - \frac{2R_0\mathcal{P}}{\mathcal{G}M_SM}t}$$
12. La Terre quitte l'attraction du Soleil lorsque E_m devient positive, ou autrement, à l'instant t tel que $a(t)$ diverge. Soit $1 - \frac{2R_0\mathcal{P}}{\mathcal{G}M_SM}t = 0$. Finalement, la terre est en état de diffusion à l'instant $t = \frac{\mathcal{G}M_SM}{2R_0\mathcal{P}}$. L'application numérique donne une durée de 120 millions d'années ce qui n'est pas compatible avec le récit.

3 Ère de l'errance

Peu de temps après la mise en état de diffusion de la Terre, le Soleil explose et devient supernova, comme les astronomes l'avaient prévu quelques siècles auparavant. La Terre se dirige vers Proxima du centaure située à 4,244 années lumière, elle l'atteindra dans 2500 ans.

1. La Terre voyage à la vitesse de 510 km.s^{-1}.
2. 

3. Les particules entrant en collision avec la Terre entre t et $t + \mathrm{d}t$ se trouve dans le volume $\mathrm{d}V = \pi R_T^2 v \mathrm{d}t$. La densité particulaire est $n^\star$ donc le nombre de particules entrant en collision avec la Terre entre t et $t + \mathrm{d}t$ vaut $\mathrm{d}N = n^\star \mathrm{d}V = \pi n^\star R_T^2 v \mathrm{d}t$.
4. Chaque particule possède une vitesse $-v\vec{e}_x$ avant la collision et donc une impulsion $\vec{p} = -mv\vec{e}_x$ puis possède une impulsion nulle après la collision. Sa variation de quantité de mouvement vaut donc $\delta\vec{p} = mv\vec{e}_x$.
5. La variation de quantité de mouvement de toutes les particules entrant en collision avec la Terre entre t et $t+\mathrm{d}t$ vaut alors $\mathrm{d}\vec{p} = \mathrm{d}Nmv\vec{e}_x = \pi m n^\star R_T^2 v^2 \mathrm{d}t\vec{e}_x$. La seconde loi de Newton appliquée aux particules donne :
$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\mathrm{T->part}} = \pi m n^\star R_T^2 v^2 \vec{e}_x$$
6. D'après la troisième loi de Newton la force exercée sur la Terre vaut $-\pi m n^\star R_T^2 v^2 \vec{e}_x$. Celle-ci s'apparente bien à une force de frottement fluide du type $\vec{f} = -\beta v^2 \vec{e}_x$, avec $\beta = -\pi m n^\star R_T^2$.
7.
```python
M = 6e24 #masse de la Terre en kg
beta = 1e7 #coeff de frottement en kg/m
x = 0     #position initiale de la Terre
dt = 10   #pas de temps en s
e = 1e13 #épaisseur du nuage en m

while x<e :
    v = v - 1/M * beta*v**2 * dt #calcul v(t+dt)
    x = x + v*dt #calcul de x(t+dt)
print(v)
```
8. On trouve une augmentation de 15 jours.