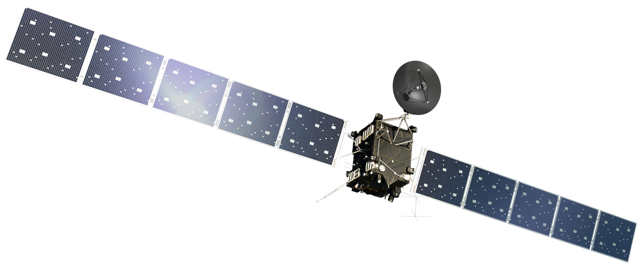
Attention :

- Justifiez tous vos résultats, commentez les applications numériques si cela vous semble pertinent.
- Tout résultat non justifié sera systématiquement considéré comme faux.
- Soignez la présentation : faites de belles figures, encadrez les résultats, aérez votre copie.
- Les résultats non homogènes seront sanctionnés.

À propos de la sonde Rosetta



Rosetta est une mission de l'agence spatiale européenne (ESA) qui a pour but d'étudier la comète Tchourioumov–Guérassimenko (67P/TG). La sonde a été lancée le 2 Mars 2004 par une fusée Ariane 5. Après un voyage de près de 10 ans pendant lequel elle aura parcouru près de 6,5 milliards de km, Rosetta a atteint la comète en août 2014 pour une période d'observation de 18 mois. La sonde est constituée d'un satellite principal et d'un atterrisseur (Philae). En novembre 2014, le module Philae a été envoyé à la surface de la comète. L'objet de cette épreuve est d'aborder quelques questions relatives à la mission Rosetta. On désigne dans l'énoncé par v le module du vecteur $\vec{v}$. Tout résultat fourni par l'énoncé peut être utilisé par la suite même s'il n'a pas été obtenu par le candidat. Les données numériques utiles sont fournies **à la fin du problème**.
On s'intéresse à une étude simplifiée de problématiques liées à la navigation spatiale. *Une deuxième partie abordait dans le sujet d'origine l'optique d'un instrument embarqué. Elle n'a pas été incluse dans ce devoir.*

A. Question Préliminaires

Q1 1. Montrer que le mouvement d'un astre en orbite autour du Soleil est plan.

Q2 2. Montrer que la force de gravitation $\vec{F}$ que le Soleil exerce sur un objet de masse m situé à une distance r de son centre est conservative et déterminer l'expression de l'énergie potentielle associée.

Q3 3. On suppose que le mouvement de la Terre autour du Soleil est circulaire. Montrer que le mouvement est uniforme et retrouver l'expression (et la valeur) de la vitesse de la Terre.

Q4 4. Montrer que l'énergie mécanique d'un objet de masse m pour une orbite elliptique autour d'un corps de masse M est donnée par $E_m = -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}Mm}{a}$, où a est le demi grand axe de l'ellipse.

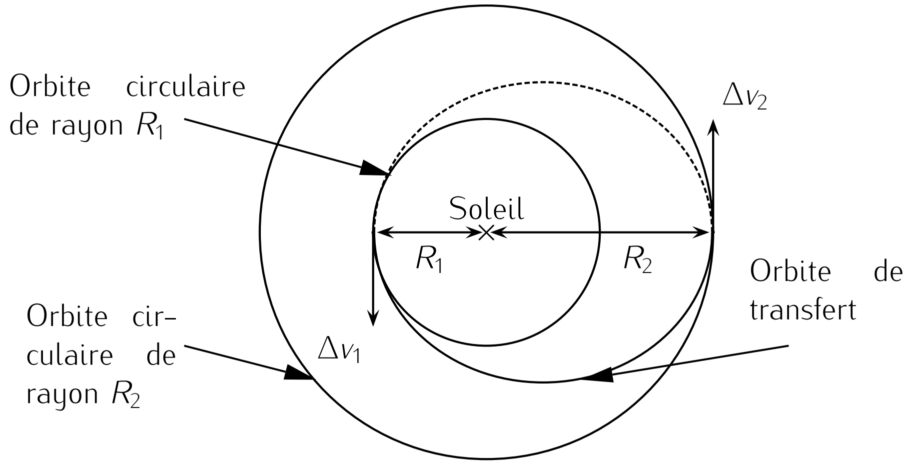
B. Ellipse de Hohmann

Une façon simple d'envoyer un engin spatial d'une orbite circulaire à une autre (coplanaire) est de lui faire parcourir une orbite temporaire de transfert elliptique. Cette trajectoire est tangente aux orbites de départ et d'arrivée. Elle est appelée orbite de transfert de Hohmann. Deux impulsions sont nécessaires pour effectuer ce transfert. Une première impulsion engendre une variation de vitesse Δv_1 (voir Figure 1) ce qui permet le passage de l'orbite circulaire de départ vers l'orbite elliptique de transfert. Une seconde impulsion, associée à une variation de vitesse Δv_2, permet le passage de l'orbite de transfert vers l'orbite d'arrivée.

Figure 1 :

Transfert de Hohmann entre deux orbites circulaires de rayons R_1 et R_2 autour du soleil.

L'orbite elliptique de transfert possède un demi grand axe $a = (R_1 + R_2)/2$



Q5 5. Montrer que l'expression du paramètre Δv_1 permettant de passer d'une orbite circulaire de rayon R_1 à une orbite elliptique de demi grand axe $a = \frac{R_1+R_2}{2}$ est :

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R_1}}\left(\sqrt{\frac{2R_2}{R_1+R_2}} - 1\right)$$

Le lanceur Ariane 5G+ utilisé pour la mission a placé dans un premier temps Rosetta sur une orbite héliocentrique de même rayon que celle de la Terre. La comète 67P/TG possède une trajectoire elliptique autour du Soleil dont le demi grand axe est de 3,5 ua. On supposera que la Terre possède une orbite quasi circulaire.
On souhaite évaluer la valeur de Δv_1 permettant de rejoindre la comète.

6. Le périhélie de la comète, c'est-à-dire le point de la trajectoire le plus proche du soleil est de l'ordre de 1 ua. On envisage une injection directe dans l'orbite de la comète depuis l'orbite circulaire de la Terre.

Q6 Trouver les valeurs de R_1 et R_2 pour l'orbite elliptique sur laquelle on veut arriver.

Q7 7. En déduire la valeur Δv_1 nécessaire à cette manœuvre.

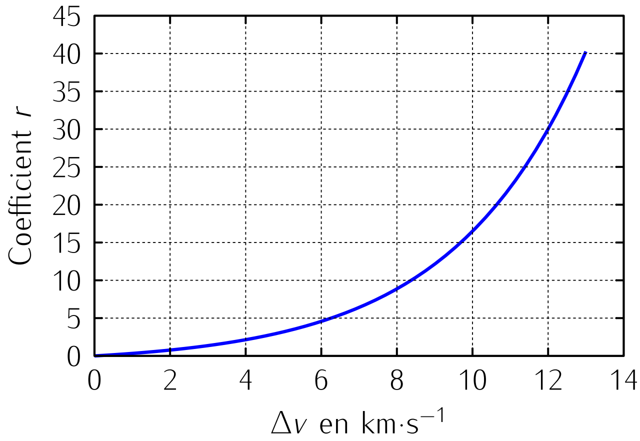
Cette grandeur (appelée aussi budget Δv) permet de déterminer la masse de carburant nécessaire aux différentes manœuvres. En pratique, lorsque plusieurs manœuvres sont nécessaires, chacune associée à une valeur Δv_i, le budget Δv correspond alors à la somme de ces dernières.

On prendra pour la suite du problème une valeur de Δv pour rejoindre la comète 67P/TG de $9{,}2\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$.

Q8 8. La quantité de carburant nécessaire à une mission est souvent quantifiée par le paramètre r défini comme $r = \dfrac{\text{masse de carburant}}{\text{masse du véhicule à vide}}$.

On a tracé (voir la figure ci-contre) la valeur du coefficient r en fonction de Δv. Indiquer de façon argumentée, en vous aidant des données fournies, si une trajectoire de Rosetta associée à une injection directe sur l'orbite de la comète 67P/TG est envisageable.

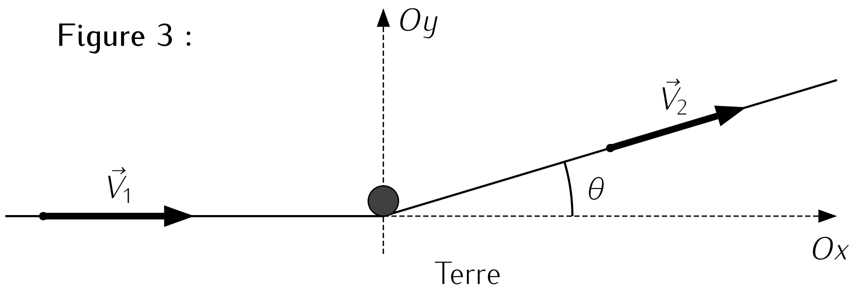
Figure 2 : Évolution de r en fonction de Δv



C. Fronde gravitationnelle

Afin de contourner les problèmes liés à la quantité limitée d'ergols, la sonde Rosetta a utilisé une trajectoire permettant d'exploiter l'effet de fronde gravitationnelle (appelé aussi assistance gravitationnelle). Cette stratégie a permis à la sonde d'acquérir de la vitesse en limitant l'utilisation d'ergols. En contre-partie, la durée de la mission devient plus longue...
Rosetta a utilisé trois assistances gravitationnelles en passant à proximité de la Terre. On propose dans cette question une étude simplifiée d'une assistance gravitationnelle. On se place dans le référentiel géocentrique supposé galiléen $\mathcal{R}_T$. La sonde arrive de l'infini (c'est-à-dire hors de la zone d'influence gravitationnelle de la Terre) avec une vitesse $\vec{V}_1$ dans le référentiel R_T. La sonde passe à proximité de la Terre puis s'éloigne ensuite à l'infini avec une vitesse asymptotique $\vec{V}_2$ (voir la Figure 3).

Figure 3 :



Q9 9. Montrer que l'on a $V_1 = V_2$.

10. On posera $V = V_1 = V_2$. On suppose que dans le référentiel héliocentrique $\mathcal{R}_H$ la vitesse de la Terre $\vec{v}_T$ est dirigée suivant la direction Oy de la Figure 3.
On admettra la loi de composition des vitesses suivantes :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}_H) = \vec{v}(M/\mathcal{R}_T) + \vec{v}_T$$

où $\vec{v}(M/\mathcal{R}_H)$ représente la vitesse d'un point matériel M par rapport au référentiel héliocentrique et $\vec{v}(M/\mathcal{R}_T)$ celle par rapport au référentiel géocentrique.

Q10 En déduire l'expression de la variation Δv de la valeur de la vitesse $\vec{v}$ de la sonde dans le référentiel héliocentrique à l'issue de son passage à proximité de la Terre en fonction de v_T, V et θ. Donner une estimation de Δv en prenant $V = 5\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ et $\theta = 45°$ (la valeur de v_T a été déterminée à la question A.3).

Q11 11. Compte tenu de l'effet de fronde et de la courbe r en fonction de Δv, combien de passages à proximité de la Terre semblent nécessaires pour que la sonde soit assez légère pour être lancée par Ariane 5 ?

Q12 12. Pour quelle raison selon vous, l'usage de l'assistance gravitationnelle augmente-t-il la durée du voyage vers la comète cible par rapport à une trajectoire directe ?

Données numériques :

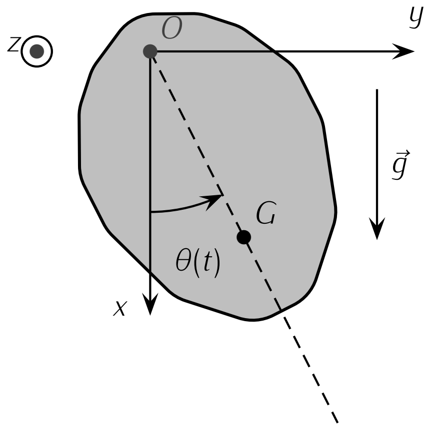
- **Grandeurs physiques :**
  - Masse du soleil : $M_S = 2{,}0\,10^{30}$ kg
  - Masse de la Terre : $M_T = 6{,}0\,10^{24}$ kg
  - Rayon moyen de l'orbite de la Terre autour du Soleil : 1 unité astronomique (ua) = $150\,10^6$ km
  - Rayon de la Terre : $R_T = 6{,}4\,10^3$ km
  - Constante de gravitation universelle : $\mathcal{G} = 6{,}67\,10^{-11}$ m^3·kg^{-1}·s^{-2}
  - Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}0\,10^8$ m·s^{-1}
  - Constante de Planck : $h = 6{,}63\,10^{-34}$ J·s
  - Charge élémentaire : $e = 1{,}6\,10^{-19}$ C
  - Masse d'un électron : $m = 9{,}1\,10^{-31}$ kg
  - Permittivité diélectrique du vide $\epsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F·m^{-1}
  - 1 électron-volt = $1{,}6\,10^{-19}$ J
- **Données techniques relatives à Rosetta :**
  - Masse à vide de Rosetta : 1300 kg
  - Charge utile du lanceur Ariane 5G+ : 6950 kg
- **Caractéristiques de la comète Tchourioumov-Guérassimenko :**
  - Distance du Soleil au moment du rendez-vous avec Rosetta : 3,3 ua
  - Diamètre du noyau = 4 km
  - Albédo du noyau : (fraction du rayonnement solaire incident réfléchie par le noyau) = 4%
- **Constante solaire :**
  La constante solaire exprime l'énergie que recevrait du soleil par seconde une surface de 1 m^2 située à une distance 1 ua (distance moyenne Terre-Soleil), exposée perpendiculairement aux rayons du Soleil (en l'absence d'atmosphère). Elle s'exprime en watt par mètre carré (W·m^{-2}). Elle vaut $F = 1{,}36$ W·m^{-2}.

Mesure de la pesanteur terrestre

Un expérimentateur désire mesurer l'intensité du champ de pesanteur terrestre à la surface de la Terre. Il va pour cela utiliser tour à tour deux types différents de pendule.

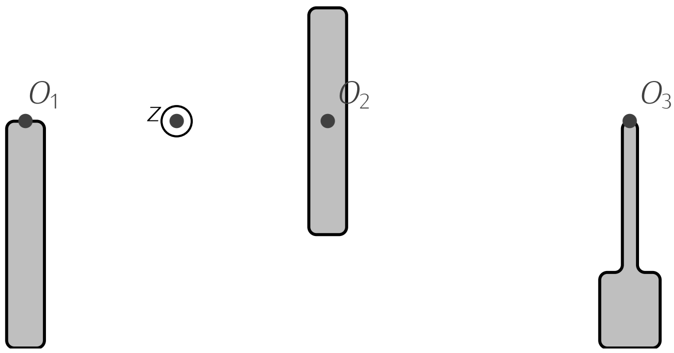
Utilisation d'un pendule sans ressort de rappel

Un pendule est composé par un solide de masse m, de centre d'inertie G, mobile autour d'un axe horizontal (Oz) et de moment d'inertie J par rapport à l'axe (Oz).
Il peut effectuer des mouvements de rotation dans le plan vertial (Oxy), autour de l'axe horizontal (Oz).
La position du pendule est repérée par l'angle θ entre la droite (OG) et la verticale descendante. On notera a la distance OG.
L'étude sera menée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen. Les frottements au niveau de l'axe de rotation et les frottements de l'air seront négligés.
Le pendule ainsi décrit se trouve dans le champ de pesanteur terrestre caractérisé par le vecteur $\vec{g}$ tel que $\vec{g} = g\vec{e}_x$.



Q13 13. Quel est le nom de la liaison permettant de faire tourner le solide autour de l'axe de rotation ?

14. Donner la définition du moment d'inertie d'un système de points.
On considère trois objets représenté ci-dessous de moment d'inertie J_1, J_2, J_3 par rapport à leur axe de rotation respectif (O_1z), (O_2z) et (O_3z). Les masses des objets sont les mêmes et les objets ne sont fait que d'un seul matériau (densité uniforme). Lequel des trois moment d'inertie est le
Q14 plus faible ? Lequel est le plus élevé ? Justifier brièvement.



Q15 15. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ au cours du temps.

16. En déduire la période T des petites oscillations du pendule autour de sa position d'équilibre,
Q16 repérée par $\theta = 0$. On exprimera T en fonction de J, m, a et g.

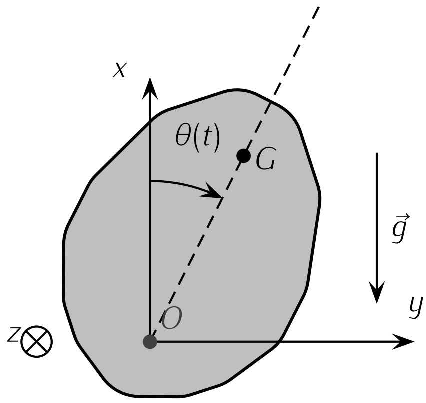
17. On souhaite étudier l'influence d'une variation d'intensité Δg du champ de pesanteur sur la période du pendule. Pour cela, on définit la sensibilité s du pendule comme le rapport $s = \frac{\Delta T}{T}$ où ΔT représente une variation infiniment petite de la période du pendule engendrée par une variation infiniment petite Δg du champ de pesanteur.

   (a) On note T_1 la période obtenue lorsque l'intensité du champ de pesanteur est g et T_2 lorsqu'elle est $g + \Delta g$. À l'aide d'un développement limité à l'ordre 1, exprimer T_2 en fonction de T_1 et de $\frac{\Delta g}{g}$. On rappelle que $(1 + \varepsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\varepsilon$ où ε est une grandeur sans dimension telle que
Q17 $|\varepsilon| \ll 1$.

Q18 (b) En déduire s en fonction de $\frac{\Delta g}{g}$.

Utilisation d'un pendule avec ressort spiral de rappel

Le pendule précédent est maintenant soumis à l'action d'un ressort spiral qui exerce un couple de rappel $M = -K\theta$ sur le pendule où K est une constante positive.
La position du pendule est repérée par l'angle θ entre la droite (OG) et la verticale ascendante.



On notera a la distance OG.

L'étude sera menée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Les frottements au niveau de l'axe de rotation et les frottements de l'air seront négligés.

Le pendule ainsi décrit se trouve dans le champ de pesanteur terrestre caractérisé par le vecteur $\vec{g}$ tel que $\vec{g} = -g\vec{e}_x$.

L'énergie potentielle du ressort spiral ne dépend que de l'angle θ et de la constante K et est donnée par l'expression $E_p(\theta) = \frac{1}{2}K\theta^2$.

18. Exprimer l'énergie mécanique totale E_m du système pendule-ressort en fonction de K, θ, m, a, g, J
Q19 et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

Q20 19. En déduire l'équation différentielle du mouvement vérifiée par l'angle θ.

20. En considérant que l'angle θ reste petit, déterminer la condition à vérifier pour que la position $\theta = 0$ soit une position d'équilibre stable d'un oscillateur harmonique. La relation sera donnée
Q21 sous forme d'une relation entre K, m, g et a.

21. Déterminer dans ce cas la période T des petites oscillations du pendule autour de la position
Q22 $\theta = 0$. On exprimera T en fonction de K, J, g, a et m.

22. On considère encore que $\theta = 0$ est une position d'équilibre et on défini comme précédemment s_1 par le rapport $s_1 = \frac{\Delta T}{T}$ où ΔT représente une variation infiniment petite de la période du pendule engendrée par une variation infiniment petite Δg du champ de pesanteur.

    Comme précédemment, on note T_1 la période obtenu lorsque l'intensité du champ de pesanteur est g et $T_2 = T_1 + \Delta T$ lorsqu'elle est $g + \Delta g$. On rappelle que $(1+\varepsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\varepsilon$ où ε est une grandeur sans dimension telle que $|\varepsilon| \ll 1$.

Q23 (a) À l'aide d'un développement limité à l'ordre 1, exprimer $T_1^2\left(\frac{1}{T_2^2} - \frac{1}{T_1^2}\right)$ en fonction de $\frac{\Delta T}{T_1}$.

Q24 (b) Exprimer indépendamment de la question précédente $\frac{1}{T_2^2} - \frac{1}{T_1^2}$ en fonction de J, a, m et Δg.

(c) En déduire l'expression de s_1 en fonction de m, a, K, g et Δg.

23. Montrer que l'on peut choisir la constante K de telle sorte que le deuxième pendule soit plus sensible que le premier et permette ainsi de détecter des variations plus faibles du champ de pesanteur terrestre.
Q25 Exprimer cette condition sous forme d'une relation entre K, g, m et a.

Enrichissement de l'uranium par effusion gazeuse

75% de l'énergie électrique consommée en France provient de réacteurs nucléaires dont 90% utilisent comme combustible l'oxyde d'uranium UO_2 dont la teneur en uranium 235 doit atteindre un seuil de 4%. En proportion insuffisante dans l'uranium naturel, il convient d'enrichir cet uranium en isotope 235. L'enrichissement par effusion gazeuse est le premier procédé industriel de séparation isotopique. Ce procédé met à profit la faible différence de masse des isotopes de l'hexafluorure d'uranium UF_6 pour séparer sélectivement les molécules par passage au travers d'une paroi poreuse.

Le diffuseur est constitué de deux compartiments de même volume V maintenus à la température T. Le compartiment (1) contient N_0 molécules d'un gaz parfait alors que le compartiment (2) est vide. À l'instant initial, un très petit orifice de surface S est percé entre les deux compartiments permettant ainsi le passage du gaz entre les compartiments (1) et (2) : c'est le phénomène d'effusion gazeuse.

L'espace est rapporté au trièdre direct $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ avec $\vec{e}_z$ normal au trou orienté vers le compartiment (2). On note $N_1(t)$ et $N_2(t)$ le nombre de molécules dans les compartiments (1) et (2) à l'instant t.

On adopte le modèle suivant :

— le trou est petit,

— le gaz se détend lentement donc tout mouvement macroscopique est négligé,

— la répartition des molécules est uniforme dans les deux compartiments,

— les vitesses de molécules ne sont orientées que selon $\pm\vec{e}_x$, $\pm\vec{e}_y$, et $\pm\vec{e}_z$) avec une norme identique égale à la vitesse quadratique moyenne $u = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$ avec $R = 8{,}31$ J.mol^{-1}.K^{-1} la constante des gaz parfaits et M la masse molaire du gaz,

— la répartition de ces six directions est isotrope.

Q26 1. (a) Exprimer le nombre $dN_{1\to2}$ de molécules du compartiment (1) traversant la surface S vers le compartiment (2) pendant une durée dt. Justifier précisément.

Q27 (b) Exprimer le nombre $dN_{2\to1}$ de molécules du compartiment (2) traversant la surface S vers le compartiment (1) pendant la même durée dt.

Q28 (c) En déduire $\frac{dN_{1\to2}}{dt}$ et $\frac{dN_{2\to1}}{dt}$ en fonction de $N_1(t)$, $N_2(t)$, S, u et V.

Q29 2. Établir que l'équation différentielle vérifiée par N_1 s'écrit :

$$\frac{dN_1}{dt} + \frac{Su}{3V}N_1 = \frac{Su}{6V}N_0$$

Q30 3. (a) Établir les expressions de $N_1(t)$ et $N_2(t)$ en fonction du nombre N_0 de molécules et d'une constante de temps τ caractéristique du phénomène de diffusion observé, dont on donnera l'expression littérale.

Q31 (b) Calculer τ sachant que l'effusion se déroule à 130 °C à travers un pore cylindrique de rayon $r = 0{,}010$ μm et que chaque compartiment possède un volume $V = 32$ L. Le gaz utilisé a une masse molaire $M = 352$ g.mol^{-1}.

4. A l'instant initial, le compartiment (1) contient deux gaz $^{235}UF_6$ et $^{238}UF_6$ de masses molaires M_5 et M_8 et de densité molaire $n_5^\star$ et $n_8^\star$. Dans la suite, les grandeurs associées à ces deux gaz seront indicées par respectivement 5 et 8. On donne $M_5 = 349$ g.mol^{-1} et $M_8 = 352$ g.mol^{-1}

Q32 (a) Calculer le rapport des temps d'effusion $\frac{\tau_8}{\tau_5}$.

Q33 (b) Commenter ce résultat brièvement en expliquant comment il est possible d'enrichir en $^{235}UF_6$ un mélange de $^{235}UF_6$ et $^{238}UF_6$ par effusion gazeuse.

À PROPOS DE LA SONDE ROSETTA

D'après Concours EPITA IPSA 2015

A. Question Préliminaires

Q1 1. $\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r^2}\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques. $d\,E_p = -\vec{F}\cdot d\vec{l} = -\vec{F}\cdot(dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\phi\vec{e}_\phi) = \frac{\mathcal{G}Mm}{r^2}dr$ donc $E_p = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r} + cte$.
L'habitude est de prendre la constante nulle pour que l'énergie potentielle soit nulle quand $r \to \infty$ soit $\boxed{E_p = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r}}$.

Q2 2. On a affaire à un mouvement à force centrale. Par application du théorème du moment cinétique dans le référentiel géocentrique, par rapport à O fixe (centre du soleil), $\frac{d\vec{L}_0(M)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F}) = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{F} = r.\vec{e}_r \wedge F_r.\vec{e}_r = \vec{0}$ d'où
$\boxed{\text{conservation du moment cinétique}}$ de la planète et en notant $\vec{L} = L.\vec{e}_z = M_P\overrightarrow{OM}\wedge\vec{v}$. Par définition du produit vectoriel, $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{L}$ sont orthogonaux. O étant fixe, M doit être dans un plan orthogonal à $\vec{L}_O$ (fixe) et contenant O (un vecteur normal et un point définissent un plan) : un seul plan vérifie ces deux conditions à condition que $\vec{L}_O \neq \vec{0}$.
$\boxed{\text{Le mouvement reste dans le plan normal à } \vec{e}_z}$.

Q3 3. Plusieurs moyens sont possibles : (on se place maintenant en coordonnées polaires dans le référentiel héliocentrique.)
- Conservation du moment cinétique : $L = r^2\dot{\theta}$ est constant, r est constant, donc $\dot{\theta}$ est aussi constant donc $\boxed{\text{le mouvement est uniforme}}$.
- Théorème de la puissance cinétique : la vitesse est selon $\vec{e}_\theta$, la force selon $-\vec{e}_r$ donc la puissance est nulle. $\boxed{\text{Le mouvement est uniforme}}$.
- PFD projeté sur $\vec{e}_\theta$: $0 = r\ddot{\theta}$ donc $\dot{\theta} = cte$. $\boxed{\text{Le mouvement est uniforme}}$.

Pour obtenir la vitesse, une bonne idée est le PFD, puisque le mouvement est circulaire uniforme $-m\frac{v^2}{r} = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r^2}$ d'où $v^2 = \frac{\mathcal{G}M}{r}$. Finalement $\boxed{v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67E-11\times 2{,}0E30}{150E9}} = 30\ \text{km/s}}$.

Q4 4. Question de cours : on cherche l'énergie mécanique au périgée r_p et à l'apogée r_a. En ces points, $\dot{r} = 0$ puisque ce sont des extremums de $r(t)$.

Évitez la notation $\dot{r}_m = 0$. C'est un peu maladroit vu que r_m est un nombre et non pas une fonction du temps. C'est $\dot{r}(t = t_m)$ qui nous intéresse.

De plus, la seule force présente est conservative, donc l'énergie mécanique est constante :

$$\begin{cases} E_m = \frac{1}{2}mr_a^2\dot{\theta}_a^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{r_a} \\ E_m = \frac{1}{2}mr_p^2\dot{\theta}_p^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{r_p} \end{cases}$$

Or, le moment cinétique se conserve, d'où $C = r^2\dot{\theta}$ se conserve

$$\begin{cases} E_m = \frac{1}{2}mr_a^2\frac{C^2}{r_a^4} - \frac{\mathcal{G}Mm}{r_a}(1) \\ E_m = \frac{1}{2}mr_p^2\frac{C^2}{r_p^4} - \frac{\mathcal{G}Mm}{r_p}(2) \end{cases}$$

à partir de là, 2 manières de résoudre :

version 1 : r_a et r_p sont solution de l'équation $E_m \times r^2 + \mathcal{G}Mm \times r - \frac{1}{2}mC^2$. D'après notre cours de math, on sait que pour une équation du second degré $\alpha x^2 + bx + c$, la somme des solutions vaut $-b/\alpha$, donc ici $r_a + r_p = \frac{\mathcal{G}Mm}{E_m}$ or $2a = r_p + r_a$ donc $\boxed{E_m = -\frac{\mathcal{G}Mm}{2a}}$.

version 2 : On essaye de faire disparaitre C par des combinaisons linéaires puisqu'on ne le connait pas. On multiplie la première équation par r_a^2, la deuxième par r_p^2 et on soustrait $E_m(r_a^2 - r_p^2) = -\mathcal{G}Mm(r_a - r_p)$

$$E_m(r_a - r_p)(r_a + r_p) = -\mathcal{G}Mm(r_a - r_p) \Rightarrow \boxed{E_m = -\frac{\mathcal{G}Mm}{2a}}$$

B. Ellipse de Hohmann

Q5 5. On passe de $E_m = -\frac{\mathcal{G}mM_S}{2R_1}$ à $E_m = -\frac{\mathcal{G}mM_S}{R_1+R_2}$
l'énergie mécanique juste avant est telle que

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{\mathcal{G}mM_S}{R_1} = -\frac{\mathcal{G}mM_S}{2R_1} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R_1}}$$

l'énergie mécanique juste après est telle que

$$\frac{1}{2}m(v_1 + \Delta v)^2 - \frac{\mathcal{G}mM_S}{R_1} = -\frac{\mathcal{G}mM_S}{R_1 + R_2} \Rightarrow (v_1 + \Delta v)^2 = 2\mathcal{G}M_S\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1 + R_2}\right)$$

$$\Rightarrow v_1 + \Delta v = \sqrt{\mathcal{G}M\frac{2R_2}{R_1(R_1 + R_2)}}$$

On en déduit : la formule de l'énoncé en injectant v_1 dans la 2$^{\text{e}}$ équation

$$\boxed{\Delta v_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R_1}}\left(\sqrt{\frac{2R_2}{R_1 + R_2}} - 1\right)}$$

Q6 6. Il faut d'abord déterminer R_2
$R_2 + R_1 = 2a$ avec $R_1 = 1$ ua et $a = 3{,}5$ ua, donc $R_2 = 6$ ua

Q7 7. On en déduit
$\Delta v_1 = v_T\left(\sqrt{\frac{2R_2}{R_1+R_2}} - 1\right) = 29{,}821\left(\sqrt{\frac{2\times6}{1+6}} - 1\right) = \boxed{9\,\text{km/s}}$
On ne donne qu'un chiffre significatif car R_1 n'est donné qu'avec un chiffre (« environ 1 u.a. »).

Q8 8. D'après l'énoncé, Δv est de l'ordre de 9,2 km/s. On a donc $r \simeq 13$ d'après le graphique.
D'après l'énoncé, la masse à vide de Rosetta est de 1300 kg. Si r vaut 13, cela veut dire que la masse de carburant est $13 \times 1300 = 16{,}9 \times 10^3$ kg.
Or il faut encore rajouter la masse à vide et la charge utile d'Ariane est deux à trois fois inférieure !
Il n'est donc $\boxed{\text{pas possible}}$ d'envoyer en orbite une charge si élevée à l'aide d'Ariane et il faut donc réduire les besoins en carburant.

C. Fronde gravitationnelle

Q9 9. On veut montrer que l'on a $V_1 = V_2$. On utilise la conservation de l'énergie mécanique. À l'infini $E_p = 0$ et par conservation $E_{m,1} = E_{m,2}$ d'où $E_{c,1} = E_{c,2}$ d'où $\boxed{v_1 = v_2}$.

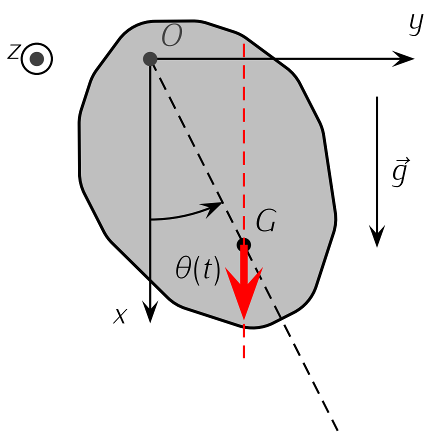
10. Dans le référentiel héliocentrique : $\vec{v}_i = \vec{v}_1 + \vec{v}_T$ et $\vec{v}_f = \vec{v}_2 + \vec{v}_T$. De plus, $\Delta v = \sqrt{\vec{v}_f^2} - \sqrt{\vec{v}_i^2}$. Au début : $\vec{v}_i^2 = V^2 + v_t^2$ car les vecteurs sont orthogonaux. À la fin, c'est un peu plus compliqué : $\vec{v}_f = v_t\vec{e}_y + V\sin\theta\vec{e}_y + V\cos\theta\vec{e}_x$ d'où $\vec{v}_f^2 = (v_t + V\sin\theta)^2 + V^2\cos^2\theta = v_t^2 + 2v_tV\sin\theta + V^2$.
Q10 On a donc $\Delta v = \sqrt{V^2 + v_T^2 + 2Vv_T\sin\theta} - \sqrt{V^2 + v_T^2}$ soit $\boxed{\Delta v = \sqrt{V^2 + v_T^2}\left(\sqrt{1 + \frac{2Vv_t}{V^2+v_T^2}\sin\theta} - 1\right) = 3\,\text{km/s}}$.

Q11 11. Une fronde permet donc de réduire Δv d'environ 3,3 km/s. Pour pouvoir décoller, il faut que la masse à vide de la sonde m_v plus la masse de carburant soit inférieur à la charge utile m_u du lanceur Ariane, soit $m_v(1 + r) < m_u$ soit $r < \frac{m_u}{m_v} - 1 \simeq 4{,}3$. Graphiquement, cela correspond approximativement à $\Delta v < 6$ km/s. Une fronde est donc presque suffisante (puisque cela amène Δv de 9,2 km/s à 5,9 km/s. Toutefois les lecture graphique n'ont pas été faites très précisément et cela correspond à une situation un peu limite, alors qu'avec deux froids, le Δv restant à faire est de 2,6 km/s, soit r de l'ordre de 2 et il y a de a marge.

Q12 12. Il faut faire plusieurs révolution autour du Soleil afin de revenir à proximité de la Terre alors que pour un trajet direct, une demi-révolution suffit.

Mesure de la pesanteur terrestre

Utilisation d'un pendule sans ressort de rappel



Q13 13. Liaison pivot

14.

$$J = \sum_i m_i r_i^2$$

Le moment d'inertie augmente beaucoup lorsque les masses sont loin de l'axe de rotation. Ainsi, le solide 2 est celui pour lequel les masses sont le plus proche de l'axe de rotation, il a donc le moment d'inertie le plus faible, le solide 3 au contraire a les masses les plus éloignés de l'axe de
Q14 rotation, il a donc le moment d'inertie le plus élevé.

15. Le bras de levier du poids est $a\sin\theta$, le poids tend à faire tourner vers les θ décroissant, donc le signe est $-$. Le moment du poids par rapport à (Oz) est donc $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) = -mga\sin\theta$. La réaction de la liaison pivot passe par l'axe (Oz) et a donc un moment nul. D'où d'après le théorème du
Q15 moment cinétique : $\boxed{J\ddot{\theta} = -mga\sin\theta}$ Dans le cas des petites oscillations : $\sin\theta \simeq \theta$ d'où

$$\ddot\theta + \frac{mga}{J}\theta = 0 = \ddot\theta + \omega_0^2\theta$$

Q16 On a donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{J}} = \frac{2\pi}{T}$ d'où $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}$.

Q17 16. (a) $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{ma(g+\Delta g)}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{\Delta g}{g}}} = T_1\left(1+\frac{\Delta g}{g}\right)^{-1/2} \simeq T_1\left(1-\frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}\right)$

Q18 (b) d'où $s = \frac{T_2 - T_1}{T_1} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}$

Utilisation d'un pendule avec ressort spiral de rappel

Q19 17. $E_m = E_{p,pes} + E_{p_ressort} + E_c = mgx + \frac{1}{2}K\theta^2 + \frac{1}{2}J\dot\theta^2 = mga\cos\theta + \frac{1}{2}K\theta^2 + \frac{1}{2}J\dot\theta^2$

18. Les forces extérieures sont conservatives, on a un solide donc les forces intérieures ne travaillent pas, d'où d'après le théorème de la puissance mécanique dans le référentiel galiléen :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = -mga\dot\theta\sin\theta + K\dot\theta\theta + J\ddot\theta\dot\theta \Rightarrow 0 = \ddot\theta + \frac{K}{J}\theta - \frac{mga}{J}\sin\theta$$

Q20

19. Si l'angle reste petit, alors :

Q21 $0 = \ddot\theta + \frac{K-mga}{J}\theta$ et les solutions sont stables si $\frac{K-mga}{J} > 0$ c'est-à-dire si $K > mga$

Q22 20. Dans ce cas, on a $\omega_0 = \sqrt{\frac{K-mga}{J}}$ d'où $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{K-mga}}$

Q23 21. (a) $T_1^2\left((T_1+\Delta T)^{-2} - T_1^{-2}\right) = -2\frac{\Delta T}{T_1}$

Q24 (b) $\frac{1}{T_2^2} - \frac{1}{T_1^2} = \frac{1}{4\pi^2 J}\left(K - ma(g+\Delta g) - K + mag\right) = -\frac{ma\Delta g}{4\pi^2 J}$

(c)

$$-2\frac{\Delta T}{T_1} = -T_1^2\frac{ma\Delta g}{4\pi^2 J} \Rightarrow \frac{\Delta T}{T_1} = \frac{1}{2}4\pi^2\frac{J}{K-mag}\frac{ma\Delta g}{4\pi^2 J} = \frac{1}{2}\frac{ma\Delta g}{K-mag}$$

22. pour que le 2e pendule soit plus sensible que le premier, il faut que $\left|\frac{s_1}{s}\right| > 1 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}\frac{ma\Delta g}{K-mag}}{\frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}} > 1$ soit

Q25 $mag > K - mag \Leftrightarrow K < 2mag$

Enrichissement de l'uranium par effusion gazeuse

1. (a) Pour pouvoir traverser la surface S, compte tenu du fait que seules 6 directions sont possibles, il est nécessaire que les particules aient vers le droite et soient donc "en face" du trou. Elles sont donc nécessairement contenue dans un "tube" en face du trou.

De plus, durant la durée dt, les particules parcourent la distance $u\,\mathrm{d}t$. Il est donc nécessaire que les particules soient à une distance inférieur à $u\,\mathrm{d}t$ du trou. Ainsi les particules "pouvant" sortir sont nécessairement contenues dans un cylindre de volume $\mathrm{d}V = S \times u\,\mathrm{d}t$ (condition nécessaire). Parmi les particules dans ce volume, seul 1/6 va dans la "bonne direction" : la droite. Toutes ces particules sont dans le bon sens, en face du trou et à une distance inférieure à $\times u\,\mathrm{d}t$, elles vont donc toutes sortir (condition suffisante, on a donc maintenant une condition nécessaire et suffisante pour sortir et on a donc le nombre de particules sortante).

En notant n^* la densité particulaire, on a donc $\mathrm{d}N_{1\to2} = \frac{1}{6}\times n^*\mathrm{d}V = \frac{1}{6}\times n^*\times S\times u\,\mathrm{d}t$. De

Q26 plus, la densité particulaire est supposée homogène, d'où $n^* = \frac{N_1(t)}{V}$. $\boxed{\mathrm{d}N_{1\to2} = \frac{N_1(t)Su}{6V}\,\mathrm{d}t}$

Justification<u>s</u> nécessaire<u>s</u> pour montrer que vous avez compris et que vous ne le faites pas juste de mémoire par rapport au cours.

Q27 (b) Par un raisonnement analogue, $\boxed{\mathrm{d}N_{2\to1} = \frac{N_2(t)Su}{6V}\,\mathrm{d}t}$. Il n'est pas utile de redétailler si vous avez bien fait la question d'avant.

(c) Simplement en divisant par dt, on trouve :

Q28 $\boxed{\frac{\mathrm{d}N_{1\to2}}{\mathrm{d}t} = \frac{N_1(t)Su}{6V}\,\mathrm{d}t}$ et $\boxed{\frac{\mathrm{d}N_{2\to1}}{\mathrm{d}t} = \frac{N_2(t)Su}{6V}}$.

2. De façon qualitative : "ce que j'ai = ce que j'avais + ce que j'ai récupéré - ce que j'ai perdu". À l'instant $t + \mathrm{d}t$, le nombre de particule dans (1) est égal au nombre de particule à t, plus les particules venant de (2), moins les particules partant de (1).
C'est-à-dire $N_1(t + dt) = N_1(t) + \mathrm{d}N_{2\to1} - \mathrm{d}N_{1\to2}$, d'où $\frac{N_1(t+dt)-N_1(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}N_{2\to1}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}N_{1\to2}}{\mathrm{d}t}$. On prend ensuite la limite $\lim\limits_{\mathrm{d}t\to0}$, et on en déduit $\frac{\mathrm{d}N_1(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{N_2(t)Su}{6V} - \frac{N_1(t)Su}{6V}$.
Pour obtenir la formule suggérée par l'énoncé, il faut éliminer N_2 de nos équations. Pour cela, on peut prendre en compte le fait que le nombre total de particule est constant : $\boxed{N_0 = N_1(t) + N_2(t)}$, d'où $N_2(t) = N_0 - N_1(t)$ et en substituant dans l'équation précédente : $\frac{\mathrm{d}N_1(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{N_0(t)Su}{6V} - 2 \times \frac{N_1(t)Su}{6V}$

Q29 et on en déduit le résultat proposé par l'énoncé : $\boxed{\frac{\mathrm{d}N_1(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{N_1(t)Su}{3V} = \frac{N_0(t)Su}{6V}}$

3. (a) La forme canonique de l'équation du premier ordre est $\frac{\mathrm{d}N_1(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{N_1(t)}{\tau} = \ldots$, d'où on pose $\boxed{\tau = \frac{3V}{Su}}$.
L'équation différentielle devient $\frac{\mathrm{d}N_1(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{N_1(t)}{\tau} = \frac{N_0}{2\tau}$. La solution particulière est $t \mapsto \frac{N_0}{2}$, la solution homogène est $t \mapsto A\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$ avec A une constante à déterminer, la solution générale est donc $\frac{N_0}{2} + A\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$. Pour trouver A on utilise les conditions initiales : à $t = 0$ l'énoncé

Q30 donne $N_1(t) = N_0$, d'où $A = \frac{N_0}{2}$.

$$\boxed{N_1(t) = \frac{N_0}{2}\left(1 + \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{N_2(t) = N_0 - N_1(t) = \frac{N_0}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$$

(b) Attention aux unités S.I. : kg et non g, K et non °C, m^3 et non L (et de façon général Pa et

Q31 non bar, mais pas de pression ici). On trouve $\boxed{\tau = 1{,}8 \times 10^{12}\,\mathrm{s}}$.

4. (a) Afin d'améliorer la précision de l'application numérique, on a intérêt à simplifier le résultat car toutes les grandeurs n'ont pas le même nombre de chiffres significatifs. En effet, r et V ont deux CS, alors que M en a 3. De plus, il est ici aisé de simplifier le résultat et donc de se faciliter l'application numérique à la calculatrice.

On a montré que $\tau = \frac{3V}{Su}$, d'où $\frac{\tau_8}{\tau_5} = \frac{\frac{3V}{Su_8}}{\frac{3V}{Su_5}} = \frac{u_5}{u_8} = \frac{\sqrt{\frac{3RT}{M_5}}}{\sqrt{\frac{3RT}{M_8}}} = \sqrt{\frac{M_8}{M_5}}$

Q32 $\boxed{\frac{\tau_8}{\tau_5} = 1{,}004}$

Remarque : Le nombre de chiffres significatifs donné dans le corrigé peut ici surprendre, toutefois il faut se rappeler que les chiffres significatifs sont une version simplifiée des incertitudes. Si on fait l'application numérique en faisant varier le dernier chiffre significatif de M_8 ou M_5, on observe que c'est bien le 3e chiffre après la virgule du résultat qui varie d'environ ±2, il est donc compréhensible de mettre 4 C.S. dans ce résultat bien qu'il n'y en ait que 3 dans les données pour M.

(b) L'uranium 235 va donc diffuser <u>très légèrement</u> plus vite que le 238. Le deuxième compartiment sera donc en régime transitoire (pas si l'on attend longtemps par rapport à τ) très légèrement enrichi en uranium.

Pour améliorer l'enrichissement, une solution simple est d'augmenter le nombre de compartiment. Supposons que l'on ait 3 compartiments, l'enrichissement sera plus efficace car la diffusion de (2) à (3) sera à nouveau plus grande pour l'isotope 235 pour deux raisons :
Q33 $\tau_5 < \tau_8$ et $N_2(^235U) > N_2(^238U)$.

Si l'on a n étages, pour l'étage $1 < k < n$, on reçoit et on envoie des particules depuis/vers la droite et la gauche $N_k(t + dt) = N_k(t) + \mathrm{d}t\,\frac{1}{2\tau}(N_{k-1}(t) + N_{k+1}(t) - 2N_k(t))$. Pour $k = 1$ $N_1(t+dt) = N_1(t)+\mathrm{d}t\,\frac{1}{2\tau}(N_2(t)-N_1(t))$. Pour $k = n$ $N_1(t+dt) = N_1(t)+\mathrm{d}t\,\frac{1}{2\tau}(N_{n-1}(t)-N_n(t))$. Et l'on a toujours la contrainte $\sum N_k = N_0$

On a donc un système (que l'on pourrait écrire grâce à une matrice tri-diagonale) linéaire. Ce type de sytème est solvable de façon analytique lorsque l'on connait plus de mathétique ou l'on peut utiliser un programme pour une résolution numérique.