DM 14 - Applications linéaires - Analyse

2025-2026

Exercice 1 :

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. Pour tout $P \in E$, on définit l'application f par

$$f(P) = P + (1 - X)P'.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminez la matrice de f dans la base canonique de E. On note A cette matrice.
3. Quel est le rang de A ? L'application f est-elle bijective ?
4. Déduire du théorème du rang et de la matrice A une base de $\text{Ker}(A)$, puis de $\text{Ker}(f)$.
5. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
6. Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
7. Justifiez que $(1, X - 1, 1 - 2X + X^2, -1 + 3X - 3X^2 + X^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
8. Ecrire la matrice de f dans cette base (en tant que départ et arrivée)

1. Soit $P \in E$. Par produit et somme de polynôme, $f(P)$ est un polynôme.
   De plus, si $P \in E$, alors $deg(P) \leq 3$, donc, $deg(P') \leq 2$. Ainsi, $deg((1 - X)P') \leq 1 + 2 = 3$.
   Finalement, $deg(f(P)) \leq max(deg((1 - X)P'), deg(P)) \leq 3$
   Finalement, $f : E \to E$
   De plus, pour tout $P, Q \in E$, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a
   $$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= \lambda P + \mu Q + (1 - X)(\lambda P + \mu Q)' \\ &= \lambda P + \mu Q + (1 - X)(\lambda P' + \mu Q') \\ &= \lambda P + \mu Q + (1 - X)(\lambda P') + (1 - X)(\mu Q') \\ &= \lambda(P + (1 - X)P') + \mu(Q + (1 - X)Q') \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q) \end{aligned}$$
   Ainsi, on a bien $f \in \mathcal{L}(E)$.
2. On a $f(1) = 1$, $f(X) = X + 1 - X = 1$, $f(X^2) = -X^2 + 2X$ et $f(X^3) = -2X^3 + 3X^2$.
   Ainsi, f a pour matrice dans la base $(1, X, X^2, X^3)$:
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
3. A a deux colonnes identiques : elle n'est donc pas de rang 4 et n'est donc pas inversible : f n'est donc pas un isomorphisme (elle n'est pas bijective).
   De plus, les trois colonnes restantes, une fois la première retirée, constituent une famille libre (faire le système associé qui se résout très vite) : A est donc de rang 3.
4. D'après le théorème du rang, $\text{Ker}(A)$ est de dimensions 1. Il suffit de trouver un vecteur non nul de $\text{Ker}(A)$. Comme les deux premières colonnes sont égales, on en déduit que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est dans le noyau.
   Ainsi, $\text{Ker}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.
   En retournant dans $\mathbb{K}_3[X]$, on en déduit $\text{Ker} f = \text{Vect}((1 - X))$.
5. On sait que Imf est engendré par les images de la base. $f(1)$ et $f(X)$ sont égaux, on peut donc enlever $f(1)$ par exemple, et il reste trois polynômes : ils sont forcément libres car on sait que Imf est de dimension 3.
   On peut aussi dire qu'il sont de degré différents, donc forcément libre, donc base de $\text{Im} f$.
   $\boxed{\text{Une base de Im} f \text{ est donc } 1,\ 2X - X^2,\ 3X^2 - 2X^3}$
6. On procède par concaténation des bases :
   $(1, 2X - X^2, 3X^2 - 2X^3, 1 - X)$ est une famille de polynômes de degré tous différents, donc elle est libre. Ils sont 4 et $dim(E) = 4$, donc ils constituent une base de E.
   Ainsi, la juxtaposition des bases est une base, donc $\text{Ker} f$ et $\text{Im} f$ sont supplémentaires.

7. A nouveau, tous les polynômes sont de degré différents, donc la famille est libre, de cardinal 4, donc c'est une base de E.
8. On calcul via la définition de f (ou via la matrice en remplaçant par les coordonnées, ce qui est encore plus simple! et on a
$f(1) = 1$,
$f(X-1) = 0$,
$f(1-2X+X^2) = -1+2X-X^2 = -(1-2X+X^2)$
et $f(-1+3X-3X^2+X^3) = 2-6X+6X^2-2X^3 = -2(-1+3X-3X^2+X^3)$
D'où la matrice dans cette nouvelle base

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

Soient f et G les fonctions définies par

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+t^2)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad G(x) = \int_x^{x^2} f(t)dt$$

1. Etude de f
   (a) Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}$ et étudiez sa parité.
   (b) Montrez (en le calculant) que f admet un développement limité à l'ordre 3 de en 0. En déduire que f est dérivable en 0 et précisez $f'(0)$.
2. Etude de G
   (a) Justifiez que G est définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrez que $\int_{-x}^{x} f(t)dt = 0$ et étudiez la parité de G.
   (c) Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Exprimez G en fonction de F et en déduire que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
   (d) Exprimez $G'(x)$ en fonction de $f(x^2)$ et $f(x)$, et déterminez un développement limité en 0 à l'ordre 4 de G.
   (e) Donnez une équation cartésienne de la tangente à la courbe de G en 0 et précisez la position de la courbe de G par rapport à sa tangente au voisinage de 0.
   (f) En déduire que G admet un extremum local en 0 que vous préciserez (minimum ou maximum, et valeur).

1. Etude de f
   (a) f est définie sur $\mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}^*$ par composition de fonctions continues. Regardons la limite quand $t \to 0$. Comme $t^2 \to 0$, on a $\ln(1+t^2) \sim_0 t^2$, donc $f(t) \sim_0 t^2/2 = t$. On a donc $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0.
   De plus, on a immédiatement $f(-t) = -f(t)$, donc f est impaire.
   (b) On veut un DL à l'ordre 3 mais on va diviser par t : on cherche donc un DL à l'ordre 4 du numérateur.
   Comme on va composer par une puissance de t, il suffit de partir d'un $DL_2(0)$:
   $$\ln(1+t) \underset{0}{=} t - \frac{t^2}{2} + o(t^2), \text{ donc } \ln(1+t^2) \underset{0}{=} t^2 - \frac{t^4}{2} + o(t^4)$$
   Enfin :
   $$\boxed{f(t) \underset{0}{=} t - \frac{t^3}{2} + o(t^3)}$$
   Ainsi f est dérivable en 0, de dérivée $f'(0) = 1$.
2. Etude des variations de G
   (a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle peut être intégrée sur n'importe quel intervalle de $\mathbb{R}$, en particulier sur tout intervalle de la forme $[x, x^2]$ ou $[x^2, x]$. Ainsi $G(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Pour tout t, $f(-t) = -\dfrac{\ln(1+(-t)^2)}{t} = -f(t)$ donc f est impaire.
   D'après le cours :
   $$\boxed{\int_{-x}^{x} f(t)dt = 0}$$
   Maintenant, regardons $G(-x)$ et avec la relation de Chasles, il vient :
   $$G(-x) = \int_{-x}^{x^2} f(t)dt = \int_{-x}^{x} f(t)dt + \int_{x}^{x^2} f(t)dt = \int_{x}^{x^2} f(t)dt = G(x)$$
   Donc G est paire.

(c) Posons F une primitive de f. Comme f est continue, F est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = F(x^2) - F(x)$. Ainsi G, par composition de fonction de classe $\mathcal{C}^1$, est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

(d) On dérive, et en utilisant les propriétés de dérivation de la composée, on a immédiatement pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = 2xf(x^2) - f(x)$$

On a déjà le DL de f : $f(x) = x - \dfrac{x^3}{2} + o(x^3)$, donc $f(x^2) = x^2 + o(x^3)$ et $2xf(x^2) = 2x^3 + o(x^3)$

Ainsi, $G'(x) = -x + \dfrac{5}{2}x^3 + o(x^3)$

On intègre ce DL pour obtenir celui de G en remarquant que $G(0) = 0$ et il vient :

$$\boxed{G(x) \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{5}{8}x^4 + o(x^4)}$$

(e) D'après le développement limité obtenu précédemment, la courbe représentative de G admet une tangente d'équation d'équation cartésienne $y = 0$, et comme $G(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$, $G(x) \leq 0$ au voisinage de 0 et donc la courbe de G est en dessous de cette tangente horizontale.

(f) Question un peu redondante avec la précédente...Comme on a une tangente horizontale d'équation $y = 0$ et que la courbe de G est en dessous de cette tangente, au voisinage de 0, on a $G(x) \leq 0$. De plus comme $G(0) = 0$, G admet un maximum local en 0, donné par $G(0) = 0$.