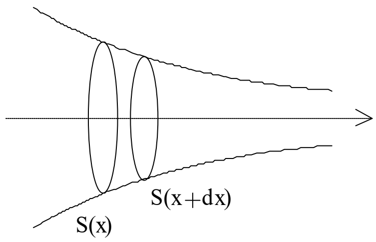
6.5 Phénomènes de propagation dispersifs-Exercice 6

Pour amplifier le son perçu par l'oreille, on peut placer à son extrémité un cornet acoustique limité par une surface de révolution d'axe Ox et de section variable $S(x) = S_0\exp(-\sigma x)$ où σ et S_0 sont des constantes.
Au repos, la pression P_0 et la masse volumique μ_0 sont uniformes. On note χ_S le coefficient de compressibilité isentropique de l'air et $c = 1/\sqrt{\mu_0\chi_S}$.
L'onde sonore est décrite par les champs $p_1(x,t)$, $\mu_1(x,t)$ et le champ de vitesse $\vec{v}_1$ pour lequel on fait l'approximation de l'écoulement quasi-unidimensionnel en posant $\vec{v}_1 = v_1(x,t)\vec{u}_x$.
On traite le problème dans l'approximation acoustique.



a-En faisant un bilan de masse pour le système ouvert compris entre les abscisses x et x+dx, établir l'équation :

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \mu_0 \sigma v_1 .$$

A l'aide de l'équation de la dynamique des fluides et de l'équation traduisant l'évolution thermodynamique isentropique du fluide, établir deux autres relations reliant les champs μ_1, p_1 et v_1.

b-Etablir l'équation de propagation vérifiée par le champ de pression acoustique.

Montrer que la relation de dispersion pour des ondes proportionnelles à $\exp[j(\omega t\text{-}kx)]$ est $k^2 - j\sigma k - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$

c-Discuter la nature de l'onde suivant les valeurs de la pulsation. Vérifier l'effet amplificateur du cornet.

6.5 Phénomènes de propagation dispersifs-Exercice 6

---

a-Bilan de masse pour le volume $S(x)dx$: $m(t+dt) = m(t) + q_m(x,t)dt - q_m(x+dx,t)dt$

Avec : $m(t) = \mu(x,t)S(x)dx$ et $q_m(x,t) = \mu(x,t)S(x)v(x,t)$

Donc : $\frac{\partial}{\partial t}((\mu_0 + \mu_1(x,t))S(x)dx) + \frac{\partial}{\partial x}\left((\mu_0 + \mu_1(x,t))S(x)v_1(x,t)\right)dx = 0$

$S(x)\frac{\partial \mu_1}{\partial t}(x,t) + \mu_0 S(x)\frac{\partial v_1}{\partial x}(x,t) + \mu_0 v_1(x,t)\frac{\partial S}{\partial x}(x) = 0$ à l'ordre 1

On a : $\frac{\partial S}{\partial x}(x) = -\sigma\, S(x)$

Il reste : $\boxed{\frac{\partial \mu_1}{\partial t}(x,t) = -\mu_0\frac{\partial v_1}{\partial x}(x,t) + \mu_0 \sigma v_1(x,t)}$

<u>Equation d'Euler</u> linéarisée : $\mu_0\frac{\partial v_1}{\partial t}(x,t) = -\frac{\partial p_1}{\partial x}(x,t)$

<u>Equation thermodynamique</u> linéarisée : $\mu_1(x,t) = \mu_0 \chi_s p_1(x,t)$

b-L'équation d'Euler donne : $\mu_0\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}(x,t)\right) = -\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}(x,t)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \mu_1}{\partial t}(x,t) + \mu_0\sigma v_1(x,t)\right) = -\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}(x,t)$$
$$-\mu_0\chi_s\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}(x,t) + \mu_0\sigma\frac{\partial v_1}{\partial t}(x,t) = -\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}(x,t)$$
$$-\mu_0\chi_s\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}(x,t) + \sigma(-\frac{\partial p_1}{\partial x}(x,t)) = -\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}(x,t)$$

L'équation de propagation est : $\boxed{\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}(x,t) + \sigma\frac{\partial p_1}{\partial x}(x,t)}$

On reporte : $\underline{p}_1(x,t) = p_0 exp[j(\omega t - kx)]$ dans l'équation de propagation :$-k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} - j\sigma k$

D'où la relation de dispersion : $\boxed{k^2 - j\sigma k - \frac{\omega^2}{c^2} = 0}$

C'est une équation du second degré en k. Discriminant : $\Delta = 4\frac{\omega^2}{c^2} - \sigma^2$

Si $\Delta > 0$ $(\omega > \frac{\sigma c}{2})$: $k = \frac{j\sigma + \sqrt{\Delta}}{2}$

On a alors : $\underline{p}_1(x,t) = p_0 \exp\,(\frac{\sigma}{2}x) exp j\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\sigma^2 c^2}{4\omega^2}}\,x\right)$

<u>Amplification</u> <u>Propagation avec dispersion</u>

Si $\Delta < 0$ $(\omega < \frac{\sigma c}{2})$: $k = \frac{j\sigma \pm j\sqrt{-\Delta}}{2}$ imaginaire pur => <u>onde évanescente</u>

Le cornet peut amplifier mais joue aussi le rôle de filtre passe-haut

---