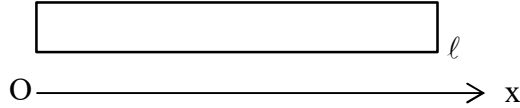


6.1.2 Solide élastique-Exercice 2

On considère une barre de longueur $\ell = 10 \text{ cm}$, de masse volumique $\rho_0 = 9000 \text{ kg.m}^{-3}$ et de section $S = 1 \text{ cm}^2$. On envisage des vibrations longitudinales de la barre.

La section d'abscisse x au repos se met en mouvement suite à une excitation. Elle se situe à l'instant t à l'abscisse $x + \xi(x, t)$ et est soumise, de la part de la matière située à sa droite, à une force $\vec{T} = T(x, t)\vec{u}_x$.

On donne la loi de Hooke : pour porter de ℓ_0 à $\ell_0 + \delta\ell_0$ la longueur d'une barre de section S , il faut exercer sur ses extrémités une force égale à $ES\delta\ell_0/\ell_0$ où $E = 10^{11} \text{ Pa}$ est le module d'Young.



a-Calculer l'allongement relatif de la tranche de barre comprise entre x et $x+dx$.

b-Montrer que : $T(x, t) = ES \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x}$.

c-Etablir l'équation de propagation vérifiée par $\xi(x, t)$. Quelle est la célérité de l'onde ?

d-La barre est fixée en $x = 0$ et libre en $x = \ell$. Quelles sont les conditions aux limites vérifiées par $\xi(x, t)$?

e-On cherche $\xi(x, t)$ sous la forme $\xi(x, t) = f(x)g(t)$. Déterminer f et g et les fréquences propres de la barre.

f-On excite la barre avec la plus basse des fréquences propres. On veut que T en O soit inférieure à une valeur limite $T_{\text{limite}} = 100 \text{ N}$. Trouver la valeur a_{max} de l'amplitude a de l'onde.

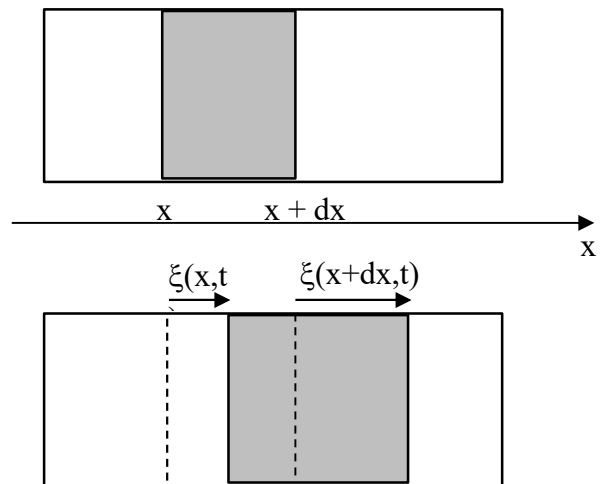
6.1.2 Solide élastique-Exercice 2

a-Longueur de la tranche avant perturbation : $\ell_0 = dx$

Longueur de la tranche après perturbation :

$$\ell_0 + \delta\ell_0 = dx + \xi(x+dx, t) - \xi(x, t) = dx \left[1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) \right]$$

Variation relative de longueur :
$$\frac{\delta\ell_0}{\ell_0} = \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t)$$



b-D'après la loi de Hooke rappelée $T(x, t) = ES \frac{\delta\ell_0}{\ell_0}$

Donc on a bien :
$$T(x, t) = ES \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x}$$

c-On applique la loi de la quantité de mouvement à la tranche, en projection selon Ox :

$$dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = T(x+dx, t) - T(x, t) \Rightarrow \rho_0 S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x, t) = ES \left[\frac{\partial \xi}{\partial x}(x+dx, t) - \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) \right] = ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(x, t) dx$$

D'où l'équation d'onde de D'Alembert :
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\rho_0}{E} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x, t)$$
 célérité :
$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$$

d-Barre fixée en $x = 0 \Rightarrow$ élongation nulle $\Rightarrow \xi(0, t) = 0$

Barre libre en $x = \ell \Rightarrow$ force nulle $\Rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x}(\ell, t) = 0$

e-On reporte $\xi(x, t) = f(x)g(t)$ dans l'équation d'onde $\Rightarrow \xi(x, t) = a \cos(\omega t - \varphi) \cos(kx - \Phi)$ (voir cours ; $k = \omega/c$)

Conditions aux limites : $\xi(0, t) = 0 \Rightarrow \cos \Phi = 0 \Rightarrow \Phi = \pi/2$ par exemple

$$\Rightarrow \xi(x, t) = A \cos(\omega t - \varphi) \sin(kx)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}(\ell, t) = 0 \Rightarrow \cos(k\ell) = 0 \Rightarrow k\ell = \pi/2 + n\pi \quad (n \text{ entier} \geq 0)$$

$$\Rightarrow k_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\ell}$$

Donc :
$$\xi(x, t) = a_n \sin \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{\ell} \right] \cos(\omega_n t - \varphi)$$

On a par ailleurs : $k_n = \frac{\omega_n}{c} = \frac{2\pi\nu_n}{c}$ d'où les fréquences propres :
$$\nu_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{c}{2\ell}$$

f-On prend la fréquence : $\nu_0 = \frac{c}{4\ell}$

On a : $T(0, t) = ES \frac{\partial \xi}{\partial x}(0, t) = ES a_0 \frac{\pi}{2\ell} \cos(\omega_0 t - \varphi)$

On veut : $ES a_0 \frac{\pi}{2\ell} \leq T_{\text{limite}} \Rightarrow a_0 \leq a_{\text{max}} = \frac{2\ell T_{\text{limite}}}{\pi ES}$

A.N : $a_{\text{max}} = 0,64 \mu\text{m}$