6.4 Ondes électromagnétiques milieux-Exercice 10

On donne le champ électrique : $\underline{\vec{E}}(x,t) = E_0 \, exp \, i(\omega t - kx)\vec{e}_z$ et $\underline{\vec{j}} = \frac{\sigma_0}{1+i\omega\tau}\underline{\vec{E}}$

a-Quelle est l'unité de σ_0 ? de τ ?

b-On donne $\tau \approx 10^{-14}$ S.I, $\sigma_0 = 6.10^7$ S.I et $\lambda = 625$ nm. Simplifier la loi d'Ohm locale.

c-Etablir l'équation de propagation.

d-En déduire la relation de dispersion. Montrer qu'elle peut s'écrire $k = \pm i\alpha$.

e-Ecrire le champ électrique en notation réelle.

---

a-σ_0 : conductivité électrique en $\Omega^{-1}.m^{-1}$ τ : temps caractéristique en seconde

b-$\omega\tau = \frac{2\pi c}{\lambda} \approx 30 \gg 1$ Donc : $\boxed{\underline{\vec{j}} \approx \frac{\sigma_0}{i\omega\tau}\underline{\vec{E}}}$

c-Equation de Maxwell-Gauss (MG) : $div\vec{E}(M,t) = 0$

Equation de Maxwell-Faraday (MF) : $\overrightarrow{rot}\,\vec{E}(M,t) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}(M,t)$

Equation de Maxwell du flux magnétique (MΦ) : $div\vec{B}(M,t) = 0$

Equation de Maxwell-Ampère (MA) : $\overrightarrow{rot}\,\vec{B}(M,t) = \mu_0\vec{j}(M,t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

On a : $\overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}(M,t)) = \overrightarrow{grad}\,(div\vec{E}(M,t)) - \Delta\vec{E}(M,t) = -\Delta\vec{E}(M,t)$

Et aussi : $\overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}(M,t)) = \overrightarrow{rot}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}(M,t)\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{rot}\,\vec{B}(M,t)) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\vec{j}(M,t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$

$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}(M,t)\right) = -\mu_0\frac{\partial\vec{j}(M,t)}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$

En égalant ces deux expressions : $\boxed{\Delta\vec{E}(M,t) = \mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}(M,t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}}$ avec $\boxed{\underline{\vec{j}} \approx \frac{\sigma_0}{i\omega\tau}\underline{\vec{E}}}$

d-On reporte $\underline{\vec{E}}(x,t) = E_0 \, exp \, i(\omega t - kx)\vec{e}_z$ dans l'équation de propagation :

$-k^2 = \mu_0 i\omega.\frac{\sigma_0}{i\omega\tau} - \frac{\omega^2}{c^2}$ => $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0\sigma_0}{\tau}$

Ordres de grandeur : $\frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \approx 10^{14}$ m^{-2} $\frac{\mu_0\sigma_0}{\tau} \approx 7{,}5.10^{15}$ m^{-2}

Donc : $k^2 = -\frac{\mu_0\sigma_0}{\tau}$ Puis : $k = \pm i\alpha$ avec $\boxed{\alpha = \sqrt{\frac{\mu_0\sigma_0}{\tau}}}$

e-On a alors : $\underline{\vec{E}}(x,t) = E_0 \, exp \, i(\omega t - (\pm i\alpha)x)\vec{e}_z = E_0 \, exp \, i\omega t . \exp(\pm\alpha x)\vec{e}_z$

On garde le signe – pour ne pas avoir un champ qui tend vers l'infini quand x croît.

Finalement : $\boxed{\underline{\vec{E}}(x,t) = E_0 \, exp \, i\omega t . \exp(-\alpha x)\vec{e}_z}$ Onde évanescente

---