Planches INP : troisième série

INP • Planche J

■ Exercice majeur

1) Donner le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

Solution. $\forall x \in]-1,1[\,,\ \dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$

2) On pose, pour tout r réel :

$$s(r) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{r-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

a. Déterminer le domaine $\mathscr{D}$ de définition de s.

Solution. Soit $r \in \mathbb{R}$ quelconque. La fonction $f_r : x \mapsto \frac{x^{r-1}}{1+x}$ est c.p.m. sur $]0,+\infty[$ (attention ! l'exposant $r-1$ peut être négatif, donc il faut exclure 0 dans le cas général).

- **En 0^+ :** $f_r(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x^{1-r}}$ et $\dfrac{1}{x^{1-r}} \geqslant 0$,
  donc $\int_0^1 f_r$ est de même nature que l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{1-r}}$: elle converge *si et seulement si* $1-r<1$, soit $r>0$;
- **En $+\infty$:** $f_r(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{2-r}}$ et $\dfrac{1}{x^{2-r}} \geqslant 0$,
  donc $\int_1^{+\infty} f_r$ est de même nature que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{2-r}}$: elle converge *si et seulement si* $2-r>1$, soit $r<1$.

Conclusion. L'intégrale définissant $s(r)$ converge *si et seulement si* $0<r<1$, donc $\mathscr{D} =]0,1[$.

b. Montrer, par un changement de variable, que pour tout $r \in \mathscr{D}$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{r-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{t^{-r}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Solution. Effectuons le changement de variable $x = \frac{1}{t}$. C'est un changement de variable usuel, donc légitime, pour lequel :

$$\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \begin{array}{ll} \text{quand } x=1, & t=1\,; \\ \text{quand } x\to+\infty, & t\to 0^+. \end{array}$$

Comme l'intégrale de départ est convergente, on peut effectuer le changement de variable :

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{x^{r-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^0 \frac{(1/t)^{r-1}}{1+1/t}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \int_0^1 \frac{t^{1-r}}{t^2+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{t^{-r}}{t+1}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

3) L'objet de cette question est le calcul de $s(r)$ pour tout $r \in \mathscr{D}$.

a. Étant donné $\alpha > -1$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k\, t^{k+\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,1[$, on a :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k\, t^{k+\alpha}\right| \leqslant t^n.$$

En déduire que (u_n) converge vers 0.

Solution.

- Fixons $\alpha > -1$ et $t \in [0,1[$.
  La série $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n\, t^{n+\alpha}$ vérifie les hypothèses du CSSA :
  1) la série est alternée car $t^{n+\alpha} \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 1$;
  2) $\left(t^{n+\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison $t \in [0,1[$: elle tend vers 0 en décroissant.
  Cette série est donc convergente, et la valeur absolue $|R_n|$ de ses restes est majorée par la valeur absolue $|u_{n+1}|$ de leur premier terme :
  $$\begin{aligned}\forall n \geqslant 1,\quad \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k\, t^{k+\alpha}\right| &\leqslant \left|(-1)^{n+1}\, t^{n+1+\alpha}\right| \\ &= t^{n+1+\alpha} \\ &= t^n \times t^{1+\alpha}.\end{aligned}$$
  Comme $1+\alpha > 0$ et que $t \in [0,1[$,
  on a $t^{1+\alpha} \leqslant t^0 = 1$, et finalement :
  $$\forall n \geqslant 1,\quad \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k\, t^{k+\alpha}\right| \leqslant t^n.$$
- *On admet que la fonction* $f : t \mapsto \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k\, t^{k+\alpha}$ *est c.p.m. sur* $[0,1[$.
  On vient de voir que : $\forall t \in [0,1[\,,\ |f(t)| \leqslant t^n$.
  Comme $t \mapsto t^n$ est intégrable sur $[0,1[$, f l'est aussi et par l'inégalité triangulaire :
  $$|u_n| = \left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$
  Grâce maintenant à la croissance de l'intégrale :
  $$\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$
  Finalement :
  $$\forall n \geqslant 1,\quad |u_n| \leqslant \frac{1}{n+1},$$
  ce qui prouve que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ par le théorème des gendarmes.

b. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t}\,\mathrm{d}t$ sous la forme d'une somme de série, puis celle de $s(r)$.

Solution.

- Fixons pour l'instant $n \in \mathbb{N}^*$.
  On développe en série entière $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ et on met de côté les n premiers termes du développement :
  $$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, t^{k+\alpha}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, t^{k+\alpha} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k\, t^{k+\alpha}\right)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$
  puis, par linéarité de l'intégrale sur $]0,1[$:
  $$\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k\, t^{k+\alpha}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k\, t^{k+\alpha}\,\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+\alpha+1} + u_n.$$

Faisons maintenant tendre n vers l'infini : on sait que $u_n \to 0$, et comme le membre de gauche reste fixe, les sommes partielles de la série alternées convergent (on peut aussi le voir par le CSSA). Finalement :

$$\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+\alpha+1} + 0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+\alpha}.$$

- Pour $r \in]0,1[$, on a donc :

$$\begin{aligned} s(r) &= \int_0^{+\infty} \frac{x^{r-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x^{r-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{x^{r-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x^{r-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{t^{-r}}{1+t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Puisque $r-1>-1$ et $-r>-1$, le résultat ci-dessus s'applique :

$$\begin{aligned} s(r) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+(r-1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1-r} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k+r} + \frac{1}{k+1-r} \right). \end{aligned}$$

■ Exercice mineur

Soit $P(X) = X^4 + 4$.

1) Montrer que P n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Solution. **Par définition,** un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ est un polynôme non constant qui peut s'écrire comme produit de polynômes du premier degré. Un tel polynôme admet **nécessairement** des racines réelles. Or :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = x^4 + 4 \geqslant 4 > 0,$$

donc P n'a pas de racines réelles : il n'est donc pas scindé sur $\mathbb{R}$.

2) Factoriser P au maximum dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Solution.

∗ **Dans $\mathbb{C}[X]$:** les racines complexes de P sont les complexes z tels que $z^4 = -4$: ce sont les racines quatrièmes complexes de -4.
Sous forme exponentielle, on a $-4 = 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, ce qui donne une première racine quatrième :

$$z_0 := \sqrt[4]{4}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = 1+\mathrm{i}.$$

On les obtient toutes en la multipliant par les racines quatrièmes de l'unité : 1, i, -1, $-\mathrm{i}$.
On obtient :

$$z_0 = 1+\mathrm{i}, \quad z_1 = -1+\mathrm{i}, \quad z_2 = -1-\mathrm{i}, \quad z_3 = 1-\mathrm{i}.$$

Comme le polynôme P est unitaire de degré 4, il se factorise :

$$P(X) = (X-1-\mathrm{i})(X+1-\mathrm{i})(X+1+\mathrm{i})(X-1+\mathrm{i}).$$

∗ **Dans $\mathbb{R}[X]$:** 1^re méthode, à partir de la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$.
On reprend la factorisation précédente où l'on apparie les facteurs correspondant à des racines conjuguées :

$$\begin{aligned} P(X) &= \big((X-1-\mathrm{i})(X-1+\mathrm{i})\big) \\ &\quad \times \big((X+1-\mathrm{i})(X+1+\mathrm{i})\big) \\ &= \big(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(1+\mathrm{i})X + |1+\mathrm{i}|^2\big) \\ &\quad \times \big(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(-1+\mathrm{i})X + |-1+\mathrm{i}|^2\big) \\ &= (X^2-2X+2)(X^2+2X+2). \end{aligned}$$

∗ **Dans $\mathbb{R}[X]$:** 2^e méthode, adaptée aux polynômes bicarrés.
Les termes X^4 et 4 figurent dans le développement de l'identité remarquable $(X^2+2)^2$, mais il manque le double produit :

$$\begin{aligned} X^4 + 4 &= \left(X^2\right)^2 + 2^2 = \left(X^2+2\right)^2 - 4X^2 \\ &= \left(X^2+2\right)^2 - \left(2X\right)^2 \\ &= (X^2-2X+2)(X^2+2X+2). \end{aligned}$$

Les deux facteurs obtenus sont de discriminant $\Delta = -4 < 0$ donc ne sont pas factorisables davantage dans $\mathbb{R}[X]$.

INP • Planche K

■ Exercice majeur

Une urne contient n boules : b boules blanches et $n-b$ boules noires où $b \in [\![1,\, n-1]\!]$.

On effectue des tirages successifs et indépendants. Lorsqu'on tire une boule, on la remplace dans l'urne par une boule de l'autre couleur.

On note X_k le nombre de boules blanches dans l'urne après k tirages.

1) Déterminer la loi de X_1.

Solution. À chaque tirage, le nombre de boules blanches évolue de ± 1. Puisque $X_0 = b$, $X_1(\Omega) = \{b-1,\, b+1\}$.
Notons B_k l'événement « tirer une boule blanche au k^{e} tirage ». Alors $[X_1 = b-1] = B_1$ et $[X_1 = b+1] = \overline{B}_1$.
Comme l'urne contient initialement b boules et que le tirage est uniforme :

$$\begin{aligned} & \mathrm{P}(X_1 = b-1) = \mathrm{P}(B_1) = \frac{b}{n} \\ \text{et} \quad & \mathrm{P}(X_1 = b+1) = \mathrm{P}(\overline{B}_1) = 1 - \frac{b}{n}. \end{aligned}$$

2) Exprimer $\mathrm{P}(X_{k+1} = i)$ en fonction de $\mathrm{P}(X_k = i+1)$ et $\mathrm{P}(X_k = i-1)$.

Solution. Fixons $k \in \mathbb{N}$; le nombre de boules dans l'urne est constant égal à n ; le nombre de boules blanches est donc toujours compris entre 0 et n : $X_k(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$.
Pour calculer $\mathrm{P}(X_{k+1} = i)$, on applique la formule des probabilités totales sur le s.c.e. engendré par X_k :

$$\mathrm{P}(X_{k+1} = i) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(X_k = j)\,\mathrm{P}_{[X_k = j]}(X_{k+1} = i).$$

↪ **1^er cas : si $i \in [\![1,\, n-1]\!]$.**
Pour qu'il y ait i boules blanches après $(k+1)$ tirages, il faut qu'il y ait eu $(i-1)$ ou $(i+1)$ boules blanches au tour précédent ces deux nombres sont dans $[\![0, n]\!]$:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X_{k+1} = i) &= \mathrm{P}(X_k = i-1)\,\mathrm{P}_{[X_k = i-1]}(X_{k+1} = i) \\ &\quad + \mathrm{P}(X_k = i+1)\,\mathrm{P}_{[X_k = i+1]}(X_{k+1} = i) \\ &= \mathrm{P}(X_k = i-1)\,\mathrm{P}_{[X_k = i-1]}(\overline{B}_{k+1}) \\ &\quad + \mathrm{P}(X_k = i+1)\,\mathrm{P}_{[X_k = i+1]}(B_{k+1}) \\ &= \left(1 - \tfrac{i-1}{n}\right) \mathrm{P}(X_k = i-1) \\ &\quad + \tfrac{i+1}{n}\,\mathrm{P}(X_k = i+1). \end{aligned}$$

↪ **2^e cas : si $i = 0$ ou $i = n$.**
Pour qu'il y ait i boules blanches à l'étape $(k+1)$, le contenu de l'urne à l'étape précédente est imposé (resp. 1 et $n-1$ boucles blanches). On obtient :

$$\begin{aligned} & \mathrm{P}(X_{k+1} = 0) = \mathrm{P}(X_k = 1)\,\mathrm{P}_{[X_k = 1]}(B_{k+1}) \\ & \qquad = \frac{1}{n}\,\mathrm{P}(X_k = 1) \\ \text{et} \quad & \mathrm{P}(X_{k+1} = n) = \mathrm{P}(X_k = n-1)\,\mathrm{P}_{[X_k = n-1]}(\overline{B}_{k+1}) \\ & \qquad = \left(1 - \tfrac{n-1}{n}\right) \mathrm{P}(X_k = n-1) \\ & \qquad = \frac{1}{n}\,\mathrm{P}(X_k = n-1). \end{aligned}$$

3) On pose G_k la fonction génératrice de X_k.

a. Rappeler la définition de G_k.
Que vaut $\mathrm{G}_k(1)$?
Exprimer $\mathrm{E}(X_k)$ à l'aide de G_k'.

Solution. La fonction G_k est la somme de la série entière $\sum_{i\geqslant 0} \mathrm{P}(X_k = i)\, t^i$.

De ce fait : $\mathrm{G}_k(1) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{P}(X_k = i) = 1$

car $\big([X_k = i]\big)_{i\geqslant 0}$ est un s.c.e.

Puisque $X_k(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$, G_k est polynomiale de degré au plus n ; elle est donc dérivable en 1 et $\mathrm{E}(X_k) = \mathrm{G}_k'(1)$.

b. Exprimer $\mathrm{G}_{k+1}(t)$ à l'aide de G_k et G_k'.

Solution. Fixons $k \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{G}_{k+1}(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{P}(X_{k+1} = i)\, t^i \\ &= \frac{1}{n}\, \mathrm{P}(X_k = 1)\, t^0 \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \Big(\big(1 - \tfrac{i-1}{n}\big)\, \mathrm{P}(X_k = i-1)\, t^i \\ &\qquad\qquad + \tfrac{i+1}{n}\, \mathrm{P}(X_k = i+1) \Big) \\ &\quad + \frac{1}{n}\, \mathrm{P}(X_k = n-1)\, t^n + 0 + 0 + \cdots\end{aligned}$$

On sépare la somme centrale en 2 sommes ; le terme en t^0 rentre dans la seconde somme tandis que le terme en t^n rentre dans la première :

$$\begin{aligned}\mathrm{G}_{k+1}(t) = &\sum_{i=1}^{n} \big(1 - \tfrac{i-1}{n}\big)\, \mathrm{P}(X_k = i-1)\, t^i \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} \tfrac{i+1}{n}\, \mathrm{P}(X_k = i+1)\, t^i\end{aligned}$$

On effectue des translations d'indice pour obtenir $\mathrm{P}(X = i)$ partout :

$$\mathrm{G}_{k+1}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \big(1 - \tfrac{i}{n}\big)\, \mathrm{P}(X_k = i)\, t^{i+1} + \sum_{i=1}^{n} \tfrac{i}{n}\, \mathrm{P}(X_k = i)\, t^{i-1}$$

Dans la première somme, on peut sommer jusqu'en $i = n$ car le terme ainsi ajouté est nul. On découpe ensuite les sommes pour faire apparaître les expressions $\mathrm{P}(X_k = i)\, t^i$ et $i\,\mathrm{P}(X_k = i)\, t^{i-1}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{G}_{k+1}(t) &= t \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(X_k = i)\, t^i - \frac{t^2}{n} \sum_{i=1}^{n} i\, \mathrm{P}(X_k = i)\, t^{i-1} \\ &\qquad + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i\, \mathrm{P}(X_k = i)\, t^{i-1} \\ &= t \cdot \mathrm{G}_k(t) + \frac{1 - t^2}{n} \cdot \mathrm{G}_k'(t).\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\left.\begin{array}{l}\forall k \in \mathbb{N} \\ \forall t \in \mathbb{R}\end{array}\right| : \quad \mathrm{G}_{k+1}(t) = t \cdot \mathrm{G}_k(t) + \frac{1 - t^2}{n} \cdot \mathrm{G}_k'(t).$$

c. En déduire une relation entre $\mathrm{E}(X_{k+1})$ et $\mathrm{E}(X_k)$.

Solution. Les fonctions G_k étant polynomiales, on peut dériver sur $\mathbb{R}$ la relation ci-dessus, puis évaluer en $t = 1$:

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{G}_{k+1}'(t) &= \mathrm{G}_k(t) + t \cdot \mathrm{G}_k'(t) - \frac{2t}{n}\, \mathrm{G}_k'(t) \\ &\qquad + \frac{1 - t^2}{n}\, \mathrm{G}_k''(t) \\ \mathrm{G}_{k+1}'(1) &= \mathrm{G}_k(1) + \mathrm{G}_k'(1) - \tfrac{2}{n}\, \mathrm{G}_k'(1) + 0 \\ \mathrm{E}(X_{k+1}) &= 1 + \big(1 - \tfrac{2}{n}\big)\, \mathrm{E}(X_k).\end{aligned}$$

d. Exprimer $\mathrm{E}(X_k)$ en fonction de k.

Solution. La suite $(x_k)_{k\geqslant 0} := (\mathrm{E}(X_k))_{k\geqslant 0}$ est une suite arithmético-géométrique vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = \big(1 - \tfrac{2}{n}\big)\, x_k + 1.$$

Pour trouver son terme général, on résout l'équation

$$x = \big(1 - \tfrac{2}{n}\big)\, x + 1 \iff \tfrac{2}{n}\, x = 1 \iff x = \tfrac{n}{2}.$$

En soustrayant membre les deux relations :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = \big(1 - \tfrac{2}{n}\big)\, x_k + 1$$

$$\tfrac{n}{2} = \big(1 - \tfrac{2}{n}\big)\, \tfrac{n}{2} + 1,$$

On obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \big(x_{k+1} - \tfrac{n}{2}\big) = \big(1 - \tfrac{2}{n}\big)\, \big(x_k - \tfrac{n}{2}\big).$$

La suite $\big(x_k - \tfrac{n}{2}\big)_{k\geqslant 0}$ est donc géométrique de raison $\big(1 - \tfrac{2}{n}\big)$.
On en déduit :

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_k - \tfrac{n}{2} &= \big(1 - \tfrac{2}{n}\big)^k\, \big(x_0 - \tfrac{n}{2}\big) \\ \text{d'où : } \quad \mathrm{E}(X_k) &= \frac{n}{2} + \big(b - \tfrac{n}{2}\big)\, \big(1 - \tfrac{2}{n}\big)^k.\end{aligned}$$

Remarque. *On constate donc que $\mathrm{E}(X_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{n}{2}$: quand k devient « grand », le nombre moyen de boules blanches dans l'urne après k étapes s'approche de $\frac{n}{2}$, qui correspond à autant de boules blanches que de boules noires. Le caractère aléatoire et symétrique du modèle (la règle de remplacement des boules est équitable entre boules blanches et noires) conduit à l'effacement progressif de la composition initiale de l'urne.*

■ Exercice mineur

Soit $n \geqslant 2$ un entier.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\quad z^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

Solution. Il s'agit de donner les racines n-ièmes de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, de module 1 et d'argument $\pi/3$. Une première solution s'écrit $z_0 := 1^{1/n}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3n}}$.
Les autres s'obtiennent en multipliant z_0 par une racine n-ième de l'unité $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$, pour $k \in [\![0,\, n-1]\!]$.

Conclusion : Les solutions de l'équations sont les

$$z_k := \exp\!\big(\mathrm{i}\big(\tfrac{\pi}{3n} + \tfrac{2k\pi}{n}\big)\big), \quad \text{pour } k \in [\![0,\, n-1]\!].$$

2) Résoudre l'équation :

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 1.$$

Solution.

- Remarquons que $z \notin \{1, -1\}$ car ces deux valeurs annulent un des dénominateurs.
  Prenons $z \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$ et posons $Z = \big(\frac{z+1}{z-1}\big)^n$.
  L'équation se réécrit : $\; Z + \frac{1}{Z} = 1$. Comme $Z \neq 0$, elle est équivalente à $\; Z^2 + 1 = Z \;$ ou encore $\; Z^2 - Z + 1 = 0$.
  Cette équation du deuxième degré a pour discriminant $\Delta = -3$, donc ses solutions complexes sont :
  $$\frac{1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi/3}.$$
- Résolvons l'équation $Z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$:
  $$\begin{aligned}Z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} &\iff \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} \\ &\iff \exists k \in [\![0,\, n-1]\!] \;/\; \frac{z+1}{z-1} = \exp\!\big(\mathrm{i}\big(\tfrac{\pi}{3n} + \tfrac{2k\pi}{n}\big)\big).\end{aligned}$$
  Pour alléger les écritures, commençons par résoudre, pour un paramètre $\theta \in \mathbb{R}$ fixé :
  $$\begin{aligned}\frac{z+1}{z-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} &\iff z + 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,(z - 1) \\ &\iff \big(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big)\, z = -\big(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big).\end{aligned}$$
  Sous l'hypothèse que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 1$:
  $$\begin{aligned}\frac{z+1}{z-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \iff z &= -\frac{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\,\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\big)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\,\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\big)} \\ &= -\frac{2\cos(\theta/2)}{-2\mathrm{i}\sin(\theta/2)} \\ &= -\mathrm{i}\,\mathrm{cotan}(\theta/2).\end{aligned}$$
  Avec $\theta \leftarrow \frac{\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n}$, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on obtient la solution
  $$-\mathrm{i}\,\mathrm{cotan}\big(\tfrac{\pi}{6n} + \tfrac{k\pi}{n}\big).$$

- L'équation $Z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$ se ramène à la précédente en passant au conjugué :

$$\begin{aligned} Z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3} \quad &\iff \quad \overline{Z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} \\ &\iff \quad \left(\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} \\ &\iff \quad \exists\, k \in [\![0,\ n-1]\!] \ /\ \overline{z} = -\mathrm{i}\cot\!\left(\tfrac{\pi}{6n} + \tfrac{k\pi}{n}\right) \\ &\iff \quad \exists\, k \in [\![0,\ n-1]\!] \ /\ z = \mathrm{i}\cot\!\left(\tfrac{\pi}{6n} + \tfrac{k\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathscr{S} = \left\{\pm\mathrm{i}\cdot\cot\left(\dfrac{\pi}{6n} + \dfrac{k\pi}{n}\right) ; k \in [\![0,\ n-1]\!]\right\}$.

INP • Planche L

■ Exercice majeur

Soit $a > 0$. On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = u_n + u_n^2.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont strictement positifs et on pose $v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$.

1) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire que cette suite tend vers $+\infty$.

Solution.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = u_n^2 > 0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
- Deux cas sont possibles à ce stade :
  - $\hookrightarrow$ **ou bien** la suite est majorée, et dans ce cas elle converge par le théorème de la limite monotone,
  - $\hookrightarrow$ **ou bien** elle n'est pas majorée, et dans ce cas elle tend vers $+\infty$.

  Par l'absurde, supposons la suite majorée et notons $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite.
  Par le théorème des suites extraites, $u_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$; mais aussi :

  $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell + \ell^2$$

  par opérations sur les limites.
  Par unicité de la limite de la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient $\ell = \ell + \ell^2$, donc $\ell^2 = 0$ d'où $\ell = 0$.
  Mais comme $u_0 = a > 0$ et que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante, $\ell \geqslant a > 0$: **contradiction.**
  Conclusion : $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

2) Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, prouver l'égalité :

$$v_{n+p+1} - v_{n+p} = \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(\frac{u_{n+p+1}}{u_{n+p}^2}\right),$$

et en déduire l'encadrement :

$$0 \leqslant v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

Solution. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. Alors :

$$\begin{aligned} v_{n+p+1} - v_{n+p} &= \frac{\ln(u_{n+p+1})}{2^{n+p+1}} - \frac{\ln(u_{n+p})}{2^{n+p}} \\ &= \frac{1}{2^{n+p+1}}\Big[\ln(u_{n+p+1}) - 2\ln(u_{n+p})\Big] \\ &= \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(\frac{u_{n+p+1}}{u_{n+p}^2}\right). \end{aligned}$$

En utilisant la relation de récurrence définissant la suite :

$$\begin{aligned} v_{n+p+1} - v_{n+p} &= \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(\frac{u_{n+p} + u_{n+p}^2}{u_{n+p}^2}\right) \\ &= \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_{n+p}}\right). \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ étant croissante et strictement positive :

$$0 < u_n \leqslant u_{n+p} \quad \text{donc} \quad 0 < \frac{1}{u_{n+p}} \leqslant \frac{1}{u_n}.$$

En appliquant la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, puis en multipliant par $\frac{1}{2^{n+p+1}} \geqslant 0$:

$$0 \leqslant v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

3) Pour $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, prouver l'encadrement :

$$0 \leqslant v_{n+k+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

Solution. Fixons $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ et sommons l'encadrement de la question précédente pour $p \in [\![0,k]\!]$. Les termes au centre se télescopent et on obtient :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant v_{n+k+1} - v_n &\leqslant \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \\ &= \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{2^{p+1}} \\ &= \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (1/2)^{k+1}}{1 - 1/2} \\ &= \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \cdot \left(1 - (1/2)^{k+1}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right). \end{aligned}$$

4) Prouver que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Solution. La convergence de la *suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la convergence de la *série télescopique* $\sum\limits_{n\geqslant 0} (v_{n+1} - v_n)$.
D'après la question précédente, avec $k = 1$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

Puisque $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, on a $\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
On en déduit que : $v_{n+1} - v_n = \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.
Puisque $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente, à termes positifs, par le théorème de comparaison, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (v_{n+1} - v_n)$ est convergente également.
Conclusion : La suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.

Sa limite est notée ℓ. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$t_n = \exp(2^n\,\ell) \quad \text{et} \quad s_n = t_n - u_n.$$

5) Montrer que u_n est équivalent à t_n quand n tend vers $+\infty$.

Solution. Montrons que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} t_n$ en étudiant la limite de leur rapport :

$$\begin{aligned} \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_n}{t_n} &= \frac{\exp(2^n\,v_n)}{\exp(2^n\,\ell)} = \exp(2^n\,v_n - 2^n\,\ell) \\ &= \exp\big(2^n\,(v_n - \ell)\big). \end{aligned}$$

Par définition de ℓ, $v_n - \ell \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, mais cela ne suffit pas pour conclure.
En passant à la limite, quand $k \to \infty$, dans les inégalités larges de **Q3**, on obtient :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \ell - v_n \leqslant \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

En prenant l'opposé et en multipliant par $2^n \geqslant 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) \leqslant 2^n\,(v_n-\ell) \leqslant 0.$$

Rappelons que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, donc le membre de gauche tend vers 0. Par le théorème des gendarmes :

$$2^n\,(v_n-\ell) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{donc} \quad \frac{u_n}{t_n} = \exp\left(2^n\,(v_n-\ell)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Conclusion : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} t_n := 2^n\,\ell$.

6) Déterminer une relation entre s_{n+1}, s_n et u_n.

Solution. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= t_{n+1} - u_{n+1} = \exp\left(2^{n+1}\,\ell\right) - \left(u_n + u_n^2\right) \\ &= \left(\exp\left(2^n\,\ell\right)\right)^2 - \left(u_n+u_n^2\right) = t_n^2 - \left(u_n+u_n^2\right) \\ &= (s_n+u_n)^2 - u_n - u_n^2 \\ &= s_n^2 + 2\,s_n\,u_n - u_n. \end{aligned}$$

7) En déduire que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Solution.

- Si l'on divise par $u_n > 0$ la relation de récurrence ci-dessus, on obtient :

$$\frac{s_{n+1}}{u_n} = \frac{s_n^2}{u_n} + 2\,s_n - 1 \quad \text{d'où} \quad 1 + \frac{s_{n+1}}{u_n} = \left(2 + \frac{s_n}{u_n}\right) s_n. \qquad (*)$$

- **Montrons que $(s_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée.** On reprend l'encadrement de **Q3** et on passe à la limite dans l'inégalité quand $k \to \infty$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \ell - v_n \leqslant \frac{1}{2^n}\,\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right).$$

En multipliant par $2^n \geqslant 0$ puis en appliquant l'exponentielle :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad 1 \leqslant \exp\left(2^n\,\ell - 2^n\,v_n\right) \leqslant 1 + \frac{1}{u_n},$$

$$\text{d'où :} \quad 1 \leqslant \frac{t_n}{u_n} \leqslant 1 + \frac{1}{u_n}$$

$$1 \leqslant \frac{u_n+s_n}{u_n} \leqslant 1 + \frac{1}{u_n}$$

$$1 \leqslant 1 + \frac{s_n}{u_n} \leqslant 1 + \frac{1}{u_n}$$

$$0 \leqslant s_n \leqslant 1.$$

- On fait tendre n vers l'infini dans $(*)$.
Puisque $(s_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée et que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$, les quotients $\frac{s_{n+1}}{u_n}$ et $\frac{s_n}{u_n}$ tendent vers 0.
Le membre de gauche est équivalent à 1 tandis que le membre de droite l'est à $2\,s_n$. On en tire :

$$1 \underset{n\to\infty}{\sim} 2\,s_n \quad \text{d'où} \quad s_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2}.$$

Conclusion : En d'autres termes : $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$ et on prouvé le développement asymptotique :

$$u_n = \exp\left(2^n\,\ell\right) + \frac{1}{2} + \underset{n\to\infty}{o}(1).$$

■ Exercice mineur

1) Soit $M = \begin{pmatrix} 2\,a & 1 \\ -4 & a \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$.

À quelle condition sur a la matrice M possède-t-elle deux valeurs propres réelles distinctes ?

Solution. Les valeurs propres de M sont données par son polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} \chi_M &= X^2 - \operatorname{tr}(M)X + \det(M) \\ &= X^2 - 3\,a\,X + (2\,a^2+4). \end{aligned}$$

Son discriminant vaut : $\Delta = (3\,a)^2 - 4(2\,a^2+4) = a^2 - 16$.
On déduit :

$$\begin{aligned} &M \text{ a deux valeurs propres réelles distinctes} \\ \iff\ & \Delta > 0 \iff a^2 - 16 > 0 \iff a^2 > 16 \\ \iff\ & |\,a\,| > 4. \end{aligned}$$

2) Soit $Z \hookrightarrow \mathscr{P}(1)$. On pose $M = \begin{pmatrix} 2\,Z & 1 \\ -4 & Z \end{pmatrix}$.

Quelle est la probabilité que M possède deux valeurs propres réelles distinctes ? soit diagonalisable ?

Solution.

- En utilisant la question précédente :

$$\begin{aligned} &M(\omega) \text{ a deux valeurs propres réelles distinctes} \\ \iff\ & |\,Z(\omega)\,| > 4 \iff Z(\omega) > 4 \end{aligned}$$

car Z ne prend que des valeurs positives.
En notant A l'événement « M a deux valeurs propres réelles distinctes » :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(Z>4) &= 1 - \mathrm{P}(Z\leqslant 4) = 1 - \sum_{k=0}^{4} \mathrm{P}(Z=k) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-1}\left(1+1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{24}\right) \\ &= 1 - \tfrac{\mathrm{e}^{-1}}{24}\,(24+24+12+4+1) \\ &= 1 - \frac{65}{24\,\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

- Voyons à quelle condition sur $Z(\omega)$ la matrice $M(\omega)$ est diagonalisable (dans $\mathbb{R}[X]$) :
  - $\hookrightarrow$ **Si $M(\omega)$ a deux valeurs propres distinctes,** alors elle est diagonalisable ;
  - $\hookrightarrow$ **Si $M(\omega)$ n'a pas de valeur propre réelle,** alors elle n'est pas diagonalisable ;
  - $\hookrightarrow$ **Si $M(\omega)$ a une valeur propre réelle double :** si elle était diagonalisable, elle serait semblable à un multiple de l'identité, et serait finalement égale à cette matrice : ce n'est pas le cas à cause du coefficient 1 de $M(\omega)$.

  Ainsi : $M(\omega)$ est diagonalisable *si et seulement si* $M(\omega)$ a deux valeurs propres réelles distinctes.
  La probabilité que cela se produise est $\mathrm{P}(A)$, obtenue à la question précédente.

INP • Planche M

■ Exercice majeur

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. On dit qu'un endomorphisme u de E est **antisymétrique** lorsque :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle.$$

1) On suppose ici que $E = \mathbb{R}^3$, muni de produit scalaire usuel.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que la matrice A est antisymétrique et donner $f(a,b,c)$ pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Solution. Pour prouver que A est antisymétrique, il suffit de constater que $A^{\mathrm{T}} = -A$, ce qui est immédiat. De plus :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad f\left(\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} -b-2\,c \\ a-3\,c \\ 2\,a+3\,b \end{smallmatrix}\right)$$

b. Montrer que f est antisymétrique.

Solution. Prenons $x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned}
\langle f(x),\, y\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} -b-2c \\ a-3c \\ 2a+3b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= -(b+2c)\cdot a' + (a-3c)\cdot b' + (2a+3b)\cdot c' \\
&= a\cdot(b'+2c') + b\cdot(-a'+3c') + c\cdot(-2a'-3b') \\
&= -\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b'-2c' \\ a'-3c' \\ 2a'+3b' \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= -\langle x,\, f(y)\rangle.
\end{aligned}$$

f est donc bien antisymétrique.

c. Montrer que $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux.
Déterminer $\operatorname{rg}(f)$.

Solution.

- **Montrons que $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont orthogonaux.** Soit $x \in \operatorname{Ker}(f)$ et $y \in \operatorname{Im}(f)$; prouvons que $x \perp y$.
Il existe $x_0 \in E$ tel que $y = f(x_0)$. Alors :
$$\begin{aligned}
\langle x,\, y\rangle &= \langle x,\, f(x_0)\rangle \\
&= -\langle f(x),\, x_0\rangle \qquad \text{car } f \text{ est antisymétrique;} \\
&= -\langle 0_E,\, x_0\rangle \qquad \text{car } x \in \operatorname{Ker}(f) \\
&= 0.
\end{aligned}$$
- Les espaces $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont orthogonaux, donc leur somme est directe.
De plus, par le théorème du rang :
$$\dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) + \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big) = \dim(\mathbb{R}^3).$$
Ces deux conditions montrent que $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
Conclusion : $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$.
- Calculons le rang de A, qui est aussi le rang de f, par la méthode du pivot de Gauss sur les lignes de A :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\mathrm{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Cette dernière matrice est échelonnée et comporte 2 pivot : elle est de rang 2.
Conclusion : $\operatorname{rg}(f) = 2$.

On revient au cas général.

2) Montrer que u est antisymétrique *si et seulement si* sa matrice dans toute base orthonormée de E est antisymétrique.

Solution. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée *quelconque* de E. Posons $M := \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et prouvons que f est antisymétrique *si et seulement si* $M^{\mathrm{T}} = -M$.
Rappelons que **puisque $\mathscr{B}$ est orthonormée,** les coefficients $m_{i,j}$ de la matrice M vérifient :
$$\forall\, i, j \in [\![1, n]\!], \quad m_{i,j} = \langle e_i,\, f(e_j)\rangle.$$

- Supposons f antisymétrique ; montrons que $M^{\mathrm{T}} = -M$. Pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:
$$m_{j_i} = \langle e_j,\, f(e_i)\rangle = -\langle f(e_j),\, e_i\rangle = -\langle e_i,\, f(e_j)\rangle = -m_{i,j}.$$
- Supposons maintenant que $M^{\mathrm{T}} = -M$; prouvons que f est antisymétrique. On sait que $m_{j,i} = -m_{i,j}$ pour tous i, j.
Prenons $x, y \in E$ et décomposons-les dans la base $\mathscr{B}$:
$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k \quad \text{et} \quad y = \sum_{k=1}^{n} y_k\, e_k.$$
Partant :
$$\begin{aligned}
\langle f(x),\, y\rangle &= \left\langle f\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i\Big),\ \sum_{j=1}^{n} y_j\, e_j \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i\, f(e_i),\ \sum_{j=1}^{n} y_j\, e_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\, y_j\, \langle f(e_i),\, e_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\, y_j\, m_{j,i} \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\, y_j\, m_{i,j} \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\, y_j\, \langle e_i,\, f(e_j)\rangle \\
&= -\left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i,\ \sum_{j=1}^{n} y_j\, f(e_j) \right\rangle \\
&= -\langle x,\, f(y)\rangle.
\end{aligned}$$
L'endomorphisme f est antisymétrique.

3) Montrer, à l'aide du déterminant, que si u est antisymétrique et bijectif, alors $\operatorname{rg}(u)$ est pair.

Solution. Supposons u antisymétrique et bijectif.
Notons $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sa matrice dans une b.o.n. : elle vérifie $M^{\mathrm{T}} = -M$.
En prenant le déterminant :
$$\det(M^{\mathrm{T}}) = \det(-M) = (-1)^n \det(M)\,;$$
mais on sait également que $\det(M^{\mathrm{T}}) = \det(M)$.
On en déduit que : $\det(M) = (-1)^n \det(M)$.
Comme u est bijectif, M est inversible et $\det(M) \neq 0$.
En divisant, on obtient $1 = (-1)^n$ donc n est pair.
Enfin, $n = \dim(E) = \operatorname{rg}(u)$ car u est surjectif.
Conclusion : $\operatorname{rg}(u)$ est pair.

4) Montrer que si u est antisymétrique, alors $\operatorname{rg}(u)$ est pair.

Solution. On suppose désormais seulement u antisymétrique.
Notons $F := \operatorname{Im}(u)$ et $G := \operatorname{Ker}(u)$.
On montre comme en **Q1c** que F et G sont supplémentaires et orthogonaux.
Ces deux espaces sont stables par u.
En juxtaposant une b.o.n. $(e_1, \ldots, e_r)$ de F et $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ de G, on obtient une b.o.n. $\mathscr{B}$ de E où la matrice de u est diagonale par blocs :
$$A := \operatorname*{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{bmatrix} B & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{bmatrix}.$$
Intéressons-nous à l'endomorphisme u' induit par u sur F.
Sa matrice dans la base $(e_1, \ldots, e_r)$ est B.
Puisque $\mathscr{B}$ est orthonormée et u antisymétrique, $A^{\mathrm{T}} = -A$, ce qui entraîne immédiatement $B^{\mathrm{T}} = -B$ donc que u' reste antisymétrique.
De plus, u' est bijectif : il suffit de prouver que son noyau est nul.
Prenons $x \in \operatorname{Ker}(u')$; alors $x \in F$ et $u'(x) = 0_E$. Par définition de u', $u(x) = 0_E$ donc $x \in \operatorname{Ker}(u) = G$. Mais F et G sont supplémentaires, donc en somme directe : nécessairement $x = 0_E$.
Puisque u' est antisymétrique et bijectif, son rang est pair d'après la question précédente. Reste à remarquer que :
$$\operatorname{rg}(u') = r = \dim(\operatorname{Im} u) = \operatorname{rg}(u).$$
Conclusion : Tout endomorphisme antisymétrique est de rang pair.

■ Exercice mineur

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{n^2 - 3n + 1}{n!}$.

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, x^n$.

Solution. Puisque $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2}{n!}$, le rayon de convergence est le même que celui de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{n!}\, x^n$. Or diviser les coefficients par n ne change pas le rayon de convergence ; il s'agit donc du même que celui de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$, à savoir $+\infty$.

2) Calculer sa somme.

Solution. Posons $N \in \mathbb{N}$ et calculons les sommes partielles :

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=0}^{N} \frac{n^2-3n+1}{n!}\, x^n \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{n(n-1)-2n+1}{n!}\, x^n \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{n(n-1)}{n!}\, x^n - 2\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{n!}\, x^n + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\, x^n \\
&= \sum_{n=2}^{N} \frac{n(n-1)}{n!}\, x^n - 2\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{n!}\, x^n + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\, x^n \\
&= \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n-2)!}\, x^n - 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n-1)!}\, x^n + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\, x^n \\
&= \sum_{k=0}^{N-2} \frac{1}{k!}\, x^{k+2} - 2\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!}\, x^{k+1} + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\, x^n \\
&\xrightarrow[N\to\infty]{} x^2\,\mathrm{e}^x - 2x\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x \\
&\quad = (x-1)^2\,\mathrm{e}^x
\end{aligned}$$