Planches INP : quatrième série

INP • Planche N

Exercice majeur

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & & & \\ \vdots & & (0) & \\ n & & & \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer le rang de A et $\dim\big(\mathrm{Ker}(A)\big)$.

Solution.

- Les colonnes C_3 à C_n sont des multiples de C_2 ($C_k = k/2 \cdot C_2$) donc $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1, C_2) = 2$ car les 2 premières colonnes sont non colinéaires (grâce aux coefficients $a_{2,1} = 2$ et $a_{2,2} = 0$).
- Par le théorème du rang matriciel :
$$\dim(\mathrm{Ker}\,A) = \mathrm{n_{col}}(A) - \mathrm{rg}(A) = n-2.$$

2) Montrer que A est diagonalisable.

Solution. A est symétrique **à coefficients réels** donc elle est diagonalisable par le théorème spectral.

3) Quel est l'ordre de multiplicité de la valeur propre nulle ?

Solution. Notons que 0 est une valeur propre de A car $\dim(\mathrm{Ker}\,A) = n-2 \geqslant 1$.
De plus, comme A est diagonalisable, l'ordre de multiplicité de ses valeurs propres est égale à la dimension du SEP associé :
$$\mathrm{m}_0(A) = \dim(E_0(A)) = \dim(\mathrm{Ker}\,A) = n-2.$$

4) Montrer que :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} : \quad X^{\mathrm{T}} A X \leqslant \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (\lambda) \cdot \big(X^{\mathrm{T}} X\big),$$

avec égalité si et seulement si X est vecteur propre de A pour la plus grande valeur propre de A.

Solution.

∗ Munissons $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.
Considérons $u : V \mapsto AV$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. Comme la base canonique est orthonormée, u est autoadjoint et par le théorème spectral, il existe une base $(V_1, \ldots, V_n)$ de $\mathbb{R}^n$ **orthonormée**, constituée de vecteurs propres de u. Notons $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les valeurs propres associées.

∗ Prenons $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{n,1}\}$ que l'on décompose sur cette base $X = \sum_{i=1}^{n} x_i V_i$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} X^{\mathrm{T}} A X = \langle X, AX \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i V_i, \sum_{j=1}^{n} x_j A V_j \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i V_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j V_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_i x_j \langle V_i, V_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \end{aligned}$$

car la base $(V_1, \ldots, V_n)$ est orthonormée. En notant $M := \max\big(\mathrm{Sp}(A)\big)$, on obtient :

$$X^{\mathrm{T}} A X \leqslant M \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = M\,\|X\|^2 = M X^{\mathrm{T}} X,$$

car les x_i sont les coordonnées du vecteur X dans la b.o.n. $(V_1, \ldots, V_n)$. En conclusion :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{n,1}\} : \quad X^{\mathrm{T}} A X \leqslant M \cdot \big(X^{\mathrm{T}} X\big).$$

∗ Supposons qu'il y ait égalité. Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} M x_i^2 \quad \text{donc} \quad \sum_{i=1}^{n} (M - \lambda_i) x_i^2 = 0.$$

Il s'agit d'une somme de termes positifs, donc puisqu'elle est nulle, tous ses termes sont nuls :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] : \quad (M - \lambda_i) x_i^2 = 0 \quad \text{c.à.d.} \quad M = \lambda_i \ \text{ ou } \ x_i = 0.$$

Les x_i sont nuls pour tous les i tels que $\lambda_i < M$.
On en déduit que X est combinaison linéaire des vecteurs V_i associés à la plus grande valeur propre M, donc $X \in E_M(A)$.
Comme $X \neq 0_{n,1}$, c'est un vecteur propre de A associé de A à sa plus grande valeur propre.

5) Montrer que A a 3 valeurs propres distinctes 0, λ, $1-\lambda$ avec $\lambda > 1$.

Solution.

- Comme A est diagonalisable, χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$; on a vu que $\mathrm{m}_0(A) = n-2$, donc χ_A s'écrit :
$$\chi_A = X^{n-2} \cdot (X - \lambda) \cdot (X - \mu) \quad \text{où } \lambda, \mu \neq 0.$$
La somme des valeurs propres vaut $\mathrm{tr}(A) = 1$, donc $0 + \cdots + 0 + \lambda + \mu = 1$, c.à.d. $\mu = 1 - \lambda$.
Ainsi : il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\mathrm{Sp}(A) = \{0, \lambda, 1-\lambda\}$.
- Remarquons que la plus grande valeur propre de A se trouve parmi λ et μ. En effet, si la plus grande valeur propre était 0, on aurait $\lambda < 0$ et $\mu < 0$ donc $\lambda + \mu < 0$: cela contredit $\lambda + \mu = 1$.
Quitte à échanger λ et μ, nous supposerons que λ est la plus grande valeur propre de A.
Pour montrer que $\lambda > 1$, on applique la question précédente avec le vecteur $X = (1, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$:
$$\begin{aligned} \lambda \geqslant \frac{X^{\mathrm{T}} A X}{X X^{\mathrm{T}}} &= \frac{\langle X, AX \rangle}{\|X\|^2} \\ &= \frac{\big\langle (1,1,0,\ldots,0),\ (3,2,3,4,\ldots,n) \big\rangle}{2} \\ &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$
Cela prouve en particulier que $\lambda > 1$.
Remarque. *On peut prendre d'autres vecteurs X pour obtenir de meilleures minorations, par exemple $X = (1, 0, \ldots, 0, 1)$ qui donnera $\lambda \geqslant n + \frac{1}{2}$. Il est également possible de déterminer la valeur exacte de λ en résolvant directement l'équation aux éléments propres $AV = \lambda V$ pour $\lambda \neq 0$.*

Exercice mineur

On pose, pour tout réel $x \in [0,1]$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1 + n^2 x^2} \quad \text{et} \quad M_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1 + n^2 x^2}\,\mathrm{d}x.$$

1) Montrer que la suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f, que l'on précisera.

Solution. **Fixons $x \in [0,1]$.** Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1 + n^2 x^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Conclusion : La suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $f = \mathbb{1}_{\{0\}}$.

2) Soit $\alpha \in]0,1]$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $[\alpha,1]$.

Solution. Fixons $\alpha \in]0,1]$ et $I=[\alpha,1]$; majorons $\|f_n - f\|_\infty^I$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (comme on s'intéresse à la limite quand $n \to \infty$, on peut ignorer f_0) :

$$\forall x \in [\alpha,1] : \quad |f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+n^2x^2}-0\right| = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+n^2x^2}.$$

Puisque $1+n^2x^2 \geqslant 1+\alpha^2 n^2 \geqslant \alpha^2 n^2 > 0$:

$$\forall x \in [\alpha,1] : \quad |f_n(x)-f(x)| \leqslant \frac{1}{\alpha^2 n^2}, \quad \text{indép. de } x.$$

On en déduit que :

$$\forall n \geqslant 1 : \quad \|f_n - f\|_\infty^I \leqslant \frac{1}{\alpha^2 n^2}.$$

Puisque $\frac{1}{n^2\alpha^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, par le théorème d'encadrement : $\|f_n - f\|_\infty^I \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Conclusion : Pour tout $\alpha \in]0,1]$, la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur I vers la fonction f.

3) Qu'en-est-il sur l'intervalle $[0,1]$?

Solution. On remarque que toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0,1]$, mais pas leur limite simple $f = \mathbb{1}_{\{0\}}$ (qui est discontinue en 0).
La convergence de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ ne peut donc pas être uniforme sur le segment $[0,1]$, car cela contredirait le théorème de transfert de continuité.

4) Déterminer la limite de la suite $(M_n)_{n>0}$.

Solution. On applique le **théorème de convergence dominée** à la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur le segment $[0,1]$:

* La suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur I vers $f = \mathbb{1}_{\{0\}}$;
* Toutes les fonctions f_n, ainsi que f, sont c.p.m. sur $[0,1]$;
* Dominons les fonctions f_n par une fonction ϕ intégrable sur $[0,1]$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1] : \quad |f_n(x)| = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+n^2x^2} \leqslant 1 \ \text{ indép. de } n,$$

donc la fonction $\phi : x \mapsto 1$ convient : les fonctions constantes sont intégrables sur les intervalles bornés (comme par exemple le segment $[0,1]$).

Le théorème s'applique, et on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad M_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$.

Remarque. *Le théorème d'interversion* $\lim / \int$ *sur un segment ne s'applique pas ici, car la suite* $(f_n)_{n\geqslant 0}$ *ne converge pas uniformément sur le segment* $[0,1]$.

INP • Planche P

■ Exercice majeur

Soit $f : \ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)}\,\mathrm{d}t.$

1) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.

Solution. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et déterminons si l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
La fonction $\phi : t \mapsto \frac{1}{t^x(1+t)}$ est c.p.m. (car continue) sur $]0,+\infty[$.
Comme cette fonction est positive, prouver la convergence de l'intégrale est équivalent à prouver que la fonction est intégrable.

* En 0^+, $\phi(t) \sim \frac{1}{t^x}$, donc $\phi \in \mathrm{L}^1(]0,1])$ si et seulement si $x<1$;
* En $+\infty$, $\phi(t) \sim \frac{1}{t^{x+1}}$, donc $\phi \in \mathrm{L}^1([1,+\infty[)$ si et seulement si $x+1>1$, c.à.d. $x>0$.

Ainsi $\phi \in \mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$ si seulement si $x \in]0,1[$.

Conclusion : $\mathcal{D} =]0,1[$.

2) Montrer que f est continue sur $\mathcal{D}$.

Solution. On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
Posons $g : \ ]0,+\infty[\times]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $(t,x) \longmapsto \dfrac{1}{t^x(1+t)}$.

* Pour $t \in]0,+\infty[$ fixé :

$$x \mapsto \frac{1}{t^x(1+t)} = \frac{1}{\mathrm{e}^{x\ln(t)}(1+t)}$$

est continue sur $]0,1[$;
* Pour $x \in]0,1[$ fixé, $t \mapsto \frac{1}{t^x(1+t)}$ est c.p.m. sur $]0,+\infty[$;
* Effectuons une domination locale.
Prenons un segment $[a,b] \subset]0,1[$ et majorons :

$$\forall x \in [a,b],\ \forall t>0 : \quad |g(t,x)| = \frac{1}{t^x(1+t)} = \frac{1}{\mathrm{e}^{x\ln(t)}(1+t)}.$$

→ **1^er^ cas : si $0<t\leqslant 1$,** alors $\ln(t) \leqslant 0$.
Puisque $x \leqslant b$, $\ x\ln(t) \geqslant b\ln(t)$, $\ \mathrm{e}^{x\ln(t)} \geqslant \mathrm{e}^{b\ln(t)}$
c.à.d. $\ t^x \geqslant t^b$;
et comme $1+t>1$: $\ t^x(1+t) \geqslant t^b > 0$,
et enfin : $\ |g(t,x)| \leqslant \frac{1}{t^b}$.

→ **2^e^ cas : si $t>1$,**
on prouve de façon similaire : $\ |g(t,x)| \leqslant \frac{1}{t^{a+1}}$.

En posant $\phi : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{t^b} & \text{si } 0<t\leqslant 1, \\ \dfrac{1}{t^{a+1}} & \text{si } t>1, \end{cases}$

alors $\phi \in \mathrm{L}^1\big(]0,+\infty[\big)$ et on a :

$$\forall x \in [a,b],\ \forall t>0 : \quad |g(t,x)| \leqslant \phi(t).$$

Le théorème s'applique, prouvant que f est continue sur $]0,1[$.

3) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}$:

$$1-x \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad f(x) = f(1-x).$$

Solution. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $0<x<1$ donc $-1<-x<0$ puis $0<1-x<1$ c.à.d. $1-x \in \mathcal{D}$.
Fixons $x \in \mathcal{D}$ et effectuons le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ dans l'intégrale définissant $f(x)$. Quand $t \to 0^+$, $u \to +\infty$ et quand $t \to +\infty$, $u \to 0^+$ et on a $\mathrm{d}t = -\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$.
Puisque l'intégrale de départ est convergente, le changement de variable est légitime et :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{+\infty}^0 \frac{1}{(1/u)^x\,(1+1/u)} \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{u \cdot u^{-x} \times u \cdot (1+1/u)}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^{1-x}(u+1)}\,\mathrm{d}u \\ &= f(1-x). \end{aligned}$$

On introduit $\ h : \ x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$

4) Montrer que h est continue sur $]0,+\infty[$.

5) Montrer que :

$$\forall x \in \mathcal{D} : \quad f(x) = h(1-x) + \frac{1}{x} - h(1+x).$$

6) En déduire un équivalent de f aux bornes de son intervalle de définition.

■ Exercice mineur

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_3[X] : \quad f(P) = P - P'.$$

1) Calculer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Solution.

Remarque. *On peut expliquer rapidement que f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$: la linéarité ne fait pas de doute, mais souligner rapidement que si $P \in \mathbb{R}_3[X]$, alors :*

$$\deg\big(f(P)\big) \leqslant \max\big(\deg(P),\, \deg(P')\big) = \deg(P) \leqslant 3.$$

Les images des vecteurs de la base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ par f sont :

$$f(1) = 1,\;\; f(X) = X - 1,\;\; f(X^2) = X^2 - 2X \;\text{ et }\; f(X^3) = X^3 - 3X.$$

On en déduit que :

$$\operatorname*{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) f est-il diagonalisable ?

Solution. Comme la matrice M de f dans la base canonique est triangulaire supérieure, les valeurs propres de f se trouvent sur la diagonale :

$$\operatorname{Sp}(f) = \{1\}.$$

Si f était diagonalisable, sa matrice dans une base de vecteurs propres serait nécessairement $\operatorname{diag}(1,1,1,1) = \mathrm{I}_4$; on en déduirait que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_3[X]}$ et donc que $M = \mathrm{I}_4$: ce n'est pas le cas.

Remarque. *On peut aussi constater que*

$$\dim E_1(f) = \dim(E_1(M)) = 1 \neq 4 = \mathrm{m}_1(f).$$

3) Montrer que f est bijectif.

4) Trouver un antécédent de X par f ; même question pour X^2 et X^3. Déterminer f^{-1}.

INP • Planche Q

■ Exercice majeur

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$a_0 = a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} : \;\; a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+2}.$$

1) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs.

2) **a.** Montrer que cette suite est strictement monotone à partir du rang 1.

b. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} (a_{n+2} - a_{n+1})$ est divergente et en déduire la limite de la suite (a_n).

On note $S(x)$ la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, x^n$, pour les réels x pour lesquels elle existe.

3) **a.** Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

b. Montrer que, sur l'intervalle ouvert de convergence, la fonction S vérifie l'équation différentielle :

$$(x-1)\,y' + (x+1)\,y = 0.$$

c. En déduire l'expression de S.

4) **a.** Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\,(n-k+1).$$

b. Déterminer un équivalent de a_n quand $n \to \infty$.

■ Exercice mineur

On lance successivement un dé à 6 faces équilibré et on arrête les lancers quand on a obtenu chaque chiffre au moins un fois.

On note N le nombre total de lancers effectués (quand tous les chiffres ont été obtenus) et X_2 le nombre de lancers nécessaires, en plus du premier, pour obtenir un résultat différent de celui du premier lancer.

1) Soit $k \geqslant 2$. Lors du k-ième lancer, quelle est la probabilité d'obtenir un résultat différent de celui du premier lancer ?

Solution. Notons D_i le résultat du dé au i^{e} lancer.
Les variables D_i sont i.i.d. de loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$.
Pour $k \geqslant 2$, on cherche donc $\mathrm{P}(D_k \neq D_1)$.
On applique la **formule des probabilités totales** sur le s.c.e. engendré par D_1 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(D_k \neq D_1) &= \sum_{i=1}^{6} \mathrm{P}\big([D_1 = i] \cap [D_k \neq D_1]\big) \\
&= \sum_{i=1}^{6} \mathrm{P}\big([D_1 = i] \cap [D_k \neq i]\big) \\
&= \sum_{i=1}^{6} \mathrm{P}(D_1 = i)\,\mathrm{P}(D_k \neq i) \quad (D_1 \perp\!\!\!\perp D_k \text{ car } k \neq 1) \\
&= \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \quad (\text{car } D_1, D_k \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1,6]\!])) \\
&= \frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

2) Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance.

Solution. X_2 donne le rang du premier succès dans une succession illimitée d'épreuves de Bernoulli (le résultat du lancer est-il différent du résultat du premier lancer ?) mutuellement indépendantes et de probabilité de succès constante égale à $\frac{5}{6}$.
On en déduit que $X_2 \hookrightarrow \mathscr{G}(5/6)$.
Immédiatement : $\mathrm{E}(X_2) = \frac{1}{5/6} = \frac{6}{5}$.

3) Déterminer l'espérance de N.

Solution. On définit de manière analogue les variables X_3 à X_6 (nombres de lancers supplémentaires à effectuer pour obtenir le $3^{\text{e}}/4^{\text{e}}/5^{\text{e}}/6^{\text{e}}$ résultat distinct).
Ainsi : $N = 1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_6$.
Comme pour X_2, on montre que les variables X_k pour $k \geqslant 3$ suivent des lois géométriques de paramètres $4/6$, $3/6$, $2/6$ et $1/6$.
Puisque toutes les X_k sont d'espérance finie, par linéarité de l'espérance, N également et :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(N) &= \mathrm{E}(1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_6) \\
&= 1 + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} + \frac{6}{1} \\
&= 1 + 1{,}2 + 1{,}5 + 2 + 3 + 6 \\
&= 14{,}7.
\end{aligned}$$

Il faut en moyenne 14,7 lancers d'un dé à 6 faces pour obtenir toutes les faces du dé au moins une fois.
