Planches Mines-Télécom

Mines-Télécom • Planche A

■ Exercice nº 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad u_n = \left(n\,\sin\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)^{n^2}.$$

Déterminer $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

■ Exercice nº 2

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E.
On considère l'endomorphisme u de E défini par :

$$\forall\, i \in [\![1,\, n-1]\!],\ u(e_i) = e_{i+1} \quad\text{et}\quad u(e_n) = e_1.$$

1) Dans les cas $n = 2$ et $n = 3$, montrer que u est une isométrie et la caractériser géométriquement.

2) Dans le cas général, u est-il une isométrie ?
Si oui, préciser si elle est directe ou indirecte.

On suppose à présent que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, que $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ est une base de E et que u est défini comme précédemment.

3) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Déterminer le rang de $u - \lambda\,\mathrm{id}_E$.
L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}).$$

4) Exprimer la matrice A à l'aide du polynôme P et d'une matrice plus simple.
La matrice A est-il diagonalisable sur $\mathbb{C}$? sur $\mathbb{R}$?

Mines-Télécom • Planche B

■ Exercice nº 1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A^3 + A^2 + A = 0.$$

Démontrer que $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{Z}$.

■ Exercice nº 2

Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ x^2+y^2 \leqslant 1\right\}$ et g la fonction définie sur D par :

$$g(x,y) = \begin{cases} x\,y\,\ln(x^2+y^2) & \text{si } 0 < x^2+y^2 \leqslant 1, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Montrer que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathring{D}$.

2) Montrer que g admet des extrema globaux sur D.

3) g admet-elle un extremum local en $(0,0)$?

4) Les extrema globaux sont-ils atteints sur le bord de D ?

Mines-Télécom • Planche C

■ Exercice n° 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$.
Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, p.
Soit Y une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.
On suppose X et Y indépendantes.

Soit Z la variable aléatoire définie par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } X(\omega) \neq 0, \\ Y(\omega) & \text{si } X(\omega) = 0. \end{cases}$$

Trouver la loi de Z, puis son espérance.

■ Exercice n° 2

On pose $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est diagonalisable et donner tous ses sous-espaces propres.

2) Montrer qu'il existe une matrice B telle que $B^3 = A$.

3) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = AX(t).$$

Mines-Télécom • Planche D

■ Exercice n° 1

Trois joueurs A, B, C se font des passes avec une balle.
Le joueur A lance de façon équiprobable la balle à B ou C, de même que C lance la balle de façon équiprobable à A ou B ; mais B lance toujours la balle à C.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note a_n la probabilité que A ait la balle après n passes, et on définit b_n et c_n de la même manière.

On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$, où :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Montrer que la matrice A est semblable à :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

3) Déterminer la limite de la suite $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

■ Exercice n° 2

Soit $\theta \in]0,\pi[$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \sin(k\,\theta)\,x^k$.

1) Montrer par l'absurde que la suite :

$$(u_k)_{k\in\mathbb{N}} = \big(\sin(k\,\theta)\big)_{k\in\mathbb{N}}$$

ne converge pas vers 0.

2) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière dont la somme est f.

3) Calculer $f(x)$ pour tout réel $x \in]-R,R[$.

Mines-Télécom • Planche E

■ Exercice n° 1

1) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'équation :

$$1+\ln(x+n)=x$$

admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$.
On note u_n cette solution.

2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante.

3) Montrer que :

$$\forall\, n \geqslant 3, \quad \ln(n) < u_n < n.$$

En déduire un équivalent de u_n.

■ Exercice n° 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $1/n$. Montrer que :

1) $\mathrm{P}(X \geqslant n^2) \leqslant \dfrac{1}{n}$;

2) $\mathrm{P}\big(|X-n| \geqslant n\big) \leqslant 1-\dfrac{1}{n}$;

3) $\mathrm{P}(X \geqslant 2n) \leqslant 1-\dfrac{1}{n}$.

Mines-Télécom • Planche F

■ Exercice n° 1

Soit $T=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;/\; x\geqslant 0,\;\; y\geqslant 0,\;\; 1-x-y\geqslant 0\Big\}$.
On introduit $f:(x,y)\in T \mapsto x\,y\,\sqrt{1-x-y}$.

1) Montrer que f admet un minimum et un maximum sur T.

2) Déterminer les extrema de f.

■ Exercice n° 2

On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$P_0=1, \quad P_1=X \quad \text{et} \quad \forall\, n\in\mathbb{N},\; P_{n+2}=\frac{1}{2}\big(X\,P_{n+1}+P_n\big).$$

1) Montrer qu'il existe une variable aléatoire X_n dont P_n est la fonction génératrice.

2) Exprimer $\mathrm{E}(X_n)$ en fonction de n.

3) Déterminer la variance de X_n.
