Planches Mines-Télécom : énoncés A-K

Mines-Télécom • Planche A

■ Exercice n° 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\left(n\,\sin\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)^{n^2}.$$

Déterminer $\ell=\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

■ Exercice n° 2

Soit E un espace euclidien de dimension $n\geqslant 1$ et $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E.
On considère l'endomorphisme u de E défini par :

$$\forall\, i\in[\![1,\,n-1]\!],\ u(e_i)=e_{i+1}\quad\text{et}\quad u(e_n)=e_1.$$

1) Dans les cas $n=2$ et $n=3$, montrer que u est une isométrie et la caractériser géométriquement.

2) Dans le cas général, u est-il une isométrie ?
Si oui, préciser si elle est directe ou indirecte.

On suppose à présent que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n\geqslant 1$, que $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E et que u est défini comme précédemment.

3) Soit $\lambda\in\mathbb{C}$. Déterminer le rang de $u-\lambda\,\mathrm{id}_E$.
L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Soit $P=\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k\in\mathbb{R}[X]$ et A la matrice définie par :

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1\\ a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1}\\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C}).$$

4) Exprimer la matrice A à l'aide du polynôme P et d'une matrice plus simple.
La matrice A est-il diagonalisable sur $\mathbb{C}$? sur $\mathbb{R}$?

Mines-Télécom • Planche B

■ Exercice n° 1

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A^3+A^2+A=0.$$

Démontrer que $\mathrm{tr}(A)\in\mathbb{Z}$.

■ Exercice n° 2

Soit $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x^2+y^2\leqslant 1\right\}$ et g la fonction définie sur D par :

$$g(x,y)=\begin{cases} x\,y\,\ln(x^2+y^2) & \text{si } 0<x^2+y^2\leqslant 1,\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1) Montrer que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathring{D}$.

2) Montrer que g admet des extrema globaux sur D.

3) g admet-elle un extremum local en $(0,0)$?

4) Les extrema globaux sont-ils atteints sur le bord de D ?

Mines-Télécom • Planche C

■ Exercice nº 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$.
Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, p.
Soit Y une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.
On suppose X et Y indépendantes.

Soit Z la variable aléatoire définie par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } X(\omega) \neq 0, \\ Y(\omega) & \text{si } X(\omega) = 0. \end{cases}$$

Trouver la loi de Z, puis son espérance.

■ Exercice nº 2

On pose $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est diagonalisable et donner tous ses sous-espaces propres.

2) Montrer qu'il existe une matrice B telle que $B^3 = A$.

3) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = AX(t).$$

Mines-Télécom • Planche D

■ Exercice nº 1

Trois joueurs A, B, C se font des passes avec une balle.
Le joueur A lance de façon équiprobable la balle à B ou C, de même que C lance la balle de façon équiprobable à A ou B ; mais B lance toujours la balle à C.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note a_n la probabilité que A ait la balle après n passes, et on définit b_n et c_n de la même manière.

On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$, où :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Montrer que la matrice A est semblable à :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

3) Déterminer la limite de la suite $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

■ Exercice nº 2

Soit $\theta \in]0,\pi[$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \sin(k\,\theta)\,x^k$.

1) Montrer par l'absurde que la suite :

$$(u_k)_{k\in\mathbb{N}} = \big(\sin(k\,\theta)\big)_{k\in\mathbb{N}}$$

ne converge pas vers 0.

2) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière dont la somme est f.

3) Calculer $f(x)$ pour tout réel $x \in]-R,R[$.

Mines-Télécom • Planche E

■ Exercice n° 1

1) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'équation :

$$1+\ln(x+n)=x$$

admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$.
On note u_n cette solution.

2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante.

3) Montrer que :

$$\forall\, n \geqslant 3, \quad \ln(n) < u_n < n.$$

En déduire un équivalent de u_n.

■ Exercice n° 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $1/n$. Montrer que :

1) $\mathrm{P}(X \geqslant n^2) \leqslant \dfrac{1}{n}$;

2) $\mathrm{P}\big(|X-n| \geqslant n\big) \leqslant 1-\dfrac{1}{n}$;

3) $\mathrm{P}(X \geqslant 2n) \leqslant 1-\dfrac{1}{n}$.

Mines-Télécom • Planche F

■ Exercice n° 1

Soit $T=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x \geqslant 0,\ \ y \geqslant 0,\ \ 1-x-y \geqslant 0\big\}$.
On introduit $f:(x,y)\in T \mapsto x\,y\,\sqrt{1-x-y}$.

1) Montrer que f admet un minimum et un maximum sur T.

2) Déterminer les extrema de f.

■ Exercice n° 2

On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$P_0=1, \quad P_1=X \quad \text{et} \quad \forall\, n\in\mathbb{N},\ P_{n+2}=\frac{1}{2}\big(X\,P_{n+1}+P_n\big).$$

1) Montrer qu'il existe une variable aléatoire X_n dont P_n est la fonction génératrice.

2) Exprimer $\mathrm{E}(X_n)$ en fonction de n.

3) Déterminer la variance de X_n.

Mines-Télécom • Planche G

■ Exercice n° 1

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est diagonalisable.

2) Déterminer les éléments propres de A.

■ Exercice n° 2

On définit, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel $x > 0$:

$$u_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}.$$

1) Déterminer le domaine $\mathscr{D}$ de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$.

2) Montrer que cette série ne converge pas normalement sur $\mathscr{D}$.

On note $(R_n)_{n\geqslant 2}$ la suite des restes de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$.

3) Montrer que :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall x \in \mathscr{D},\ \ |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{x^n \ln(n+1)}.$$

4) Montrer que la somme S de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ est continue sur $\mathscr{D}$.

5) Déterminer les limites de la somme S de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ aux extrémités de $\mathscr{D}$.

Mines-Télécom • Planche H

■ Exercice n° 1

Soit E un espace euclidien, et u un endomorphisme antiautoadjoint, c'est-à-dire que :

$$\forall (x,y) \in E^2 : \quad \langle u(x),\, y\rangle = -\langle x,\, u(y)\rangle.$$

1) Montrer que : $\ \forall x \in E,\ \langle u(x),\, x\rangle = 0.$

2) Quelles sont les valeurs propres réelles possibles pour u ?

3) On note $s = u \circ u$. Montrer que s est autoadjoint. Que peut-on dire de s ?

4) Soit a une valeur propre non nulle de s (si elle existe). Soit $x \in V_a \setminus \{0_E\}$, où V_a est le sous-espace propre de u associé à la valeur propre a.

a. Montrer que :

$$\langle s(x),\, x\rangle = a\,\|x\|^2 = -\|u(x)\|^2,$$

puis que $a < 0$.

b. Montrer que $F = \mathrm{Vect}\big(x, u(x)\big)$ et $F^\perp$ sont stables par u. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E, adaptée à F et $F^\perp$, où la matrice de u soit diagonale par blocs, avec pour premier bloc diagonal :

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } b \in \mathbb{R}_+^*.$$

c. Montrer que le rang de u est pair et que sa trace est nulle.

■ Exercice n° 2

Soit $f : t \longmapsto \dfrac{t}{2-t^2}$.

1) Développez f en série entière. Précisez le rayon de convergence.

2) Donnez la loi d'une variable aléatoire X dont la fonction génératrice est f.

3) Calculez l'espérance et la variance de X.

4) Déterminez la loi de la variable aléatoire $Y = X/2$, son espérance et sa variance.

Mines-Télécom • Planche J

Exercice nº 1

Soit $F : \quad \mathbb{R} \times]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,t) \longmapsto \frac{t^x - 1}{\ln(t)}.$$

1) **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, trouver la limite de $F(x,t)$ quand t tend vers 1.

b. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 F(x,t)\,\mathrm{d}t$ diverge pour $x = -1$. **Indication :** *Regarder* $\displaystyle\int_y^1 \frac{1}{t\,\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

On introduit $\quad G : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 F(x,t)\,\mathrm{d}t$.

2) **a.** Montrer que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$ et calculer $G'(x)$.

b. En déduire l'expression de $G(x)$ pour tout $x > -1$.

Exercice nº 2

On se place dans $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$. On introduit :

$$F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;/\; \begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases} \right\}.$$

1) Montrer que F est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.

2) Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

3) Soit $u = (1,1,1,1)$.
Calculer $\mathrm{d}(u, F^\perp)$.

Mines-Télécom • Planche K

Exercice nº 1

Soit X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.
Soit Y la variable aléatoire définie par :

$$\forall\,\omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) \text{ est impair,} \\ \dfrac{X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est pair.} \end{cases}$$

1) Rappeler les développements en série entière de cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique.

2) Déterminer la loi de Y.

3) Calculer G_Y, la fonction génératrice de Y, sur $[0,1]$.

4) La variable Y admet-elle une espérance ? une variance ? Si oui, les calculer.

Exercice nº 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x$.

1) Prouver l'existence de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Étudier la convergence et la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

3) Trouver un équivalent de u_n quand $n \to \infty$.
