Planches Centrale

Centrale • Planche A

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable telle que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice L.

Soit $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A.

1) Montrer que A admet un polynôme annulateur de degré p.

2) Montrer que les valeurs propres de A sont racines de tous les polynômes annulateurs de A.
En déduire que la famille $(I_n, A, \dots, A^{p-1})$ est libre.

3) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $P_k \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que $A^k = P_k(A)$.

4) En déduire qu'il existe $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que $L = P(A)$.

Centrale • Planche B

Question de cours. Énoncer l'inégalité des accroissements finis.

Considérons l'intervalle $I = [0,\, 2\pi]$ et fixons un certain $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 0$ et $|z| < 1$.

1) Justifier que $t \mapsto \left|z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right|$ ne s'annule pas sur I, et que

$$f:\ t \longmapsto \frac{1-|z|^2}{\left|z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right|^2}$$

est continue sur I.

2) **a.** Montrer que les fonctions :

$$u: t \mapsto 1, \quad v: t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \quad \text{et} \quad w: t \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$$

sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes.

b. Montrer qu'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ tels que :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = -1 + \frac{\alpha}{1 - z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}} + \frac{\beta}{1-\overline{z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}.$$

On donnera explicitement α et β.

c. Calculer $\displaystyle \frac{1}{2\pi}\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$.

Centrale • Planche C

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$.

1) Déterminer la loi de $X+Y$.

2) Déterminer la décomposition en facteurs irréductibles du polynôme

$$1 + T + T^2 + T^3 + T^4 + T^5 \quad \text{dans } \mathbb{R}[T].$$

3) Soit X', Y' deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![1,6]\!]$. Montrer que si $X'+Y'$ et $X+Y$ ont la même loi, alors X' et Y' suivent une loi uniforme.

Centrale • Planche D

Soit $\displaystyle \varphi:\ (x,y) \in [-1,1]^2 \mapsto \int_{-1}^{1} \left|t-x\right| \times \left|t-y\right|\,\mathrm{d}t.$

On pose $\mu = \min\left\{\varphi(x,y)\,;\,(x,y)\in[-1,1]^2\right\}$.

1) Montrer que φ est continue sur $[-1,1]^2$. En déduire l'existence de μ.

2) On pose $T = \left\{(x,y) \in [-1,1]^2 \,/\, -1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\right\}$.
Montrer que :

$$\forall (x,y) \in T: \quad \varphi(x,y) = 3(y-x)^3 + \frac{2}{3} + 2xy.$$

3) Déterminer la valeur de μ.

Centrale • Planche E

On identifie $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^2$. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. On pose :

$$\mathscr{C} = \left\{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \,/\, \forall X \in \mathbb{R}^2,\ \|AX\| \leqslant \|X\|\right\}.$$

On dit que $A \in \mathscr{C}$ est un point extrémal de $\mathscr{C}$ lorsque :

$$\forall B_1, B_2 \in \mathscr{C}, \quad A = \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_2 \implies A = B_1 = B_2.$$

1) Montrer que $\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}$.

2) **a.** Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $R \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ telle que $AR \in \mathrm{S}_2(\mathbb{R})$.

b. En déduire qu'il existe $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\Omega_1 A \Omega_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

c. On suppose que $A \in \mathscr{C}$. Montrer que a et b appartiennent à $[-1,1]$.

3) Montrer que l'ensemble des points extrémaux de $\mathscr{C}$ est $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$.
