Planches Centrale

Centrale • Planche A

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable telle que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice L.

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A.

1) Montrer que A admet un polynôme annulateur de degré p.

2) Montrer que les valeurs propres de A sont racines de tous les polynômes annulateurs de A.
En déduire que la famille $(I_n, A, \dots, A^{p-1})$ est libre.

3) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $P_k \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que $A^k = P_k(A)$.

4) En déduire qu'il existe $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que $L = P(A)$.

Centrale • Planche B

Question de cours. Énoncer l'inégalité des accroissements finis.

Considérons l'intervalle $I = [0, 2\pi]$ et fixons un certain $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 0$ et $|z| < 1$.

1) Justifier que $t \mapsto \left|z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right|$ ne s'annule pas sur I, et que

$$f: \ t \longmapsto \frac{1 - |z|^2}{\left|z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right|^2}$$

est continue sur I.

2) **a.** Montrer que les fonctions :

$$u: t \mapsto 1, \quad v: t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \quad \text{et} \quad w: t \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$$

sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes.

b. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tels que :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = -1 + \frac{\alpha}{1 - z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}} + \frac{\beta}{1 - \overline{z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}.$$

On donnera explicitement α et β.

c. Calculer $\displaystyle \frac{1}{2\pi} \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$.

Centrale • Planche C

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$.

1) Déterminer la loi de $X + Y$.

2) Déterminer la décomposition en facteurs irréductibles du polynôme

$$1 + T + T^2 + T^3 + T^4 + T^5 \quad \text{dans } \mathbb{R}[T].$$

3) Soit X', Y' deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![1, 6]\!]$. Montrer que si $X' + Y'$ et $X + Y$ ont la même loi, alors X' et Y' suivent une loi uniforme.