Planches Mines-Ponts

Avec préparation de 15 minutes

Mines-Ponts • Planche A

Soit $\varphi : x \mapsto e^{-x^2}$. On admet que la fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que son intégrale vaut $\sqrt{\pi}$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrez qu'il existe un unique polynôme H_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x)\,\varphi(x).$$

Précisez le degré et le coefficient dominant de H_n.

2) Montrer que l'application

$$\psi : (P, Q) \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\varphi(t)\,dt$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

3) **a.** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall P \in \mathbb{R}[X],\ \langle P, H_n\rangle = \left\langle P', H_{n-1}\right\rangle.$$

b. En déduire que la famille (H_n) est orthogonale.

c. Calculer $\|H_n\|^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) Soit $x, t \in \mathbb{R}$ fixé.
Étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} H_n(x)\dfrac{t^n}{n!}$.

5) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Calculer la somme de la série entière de la variable t :

$$\sum_{n\geqslant 0} H_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Mines-Ponts • Planche B

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres, répétées selon leur multiplicité :

$$\lambda_1(A) \leqslant \lambda_2(A) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(A).$$

On note $\langle \cdot, \cdot\rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
On pose :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad R_A(X) = \frac{\langle AX, X\rangle}{\langle X, X\rangle}.$$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$ et G_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de dimension k. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad Ae_i = \lambda_i(A)\,e_i.$$

1) Montrer que :

$$\forall X \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) \setminus \{0\}, \quad R_A(X) \in \left[\lambda_1(A),\ \lambda_k(A)\right].$$

2) Montrer que :

$$\lambda_k(A) = \min_{V\in G_k}\left(\max_{X\in V\setminus\{0\}} R_A(X)\right).$$

3) Soit $A, B \in S_n(\mathbb{R})$.
En déduire que :

$$\lambda_1(A) + \lambda_k(B) \leqslant \lambda_k(A+B) \leqslant \lambda_n(A) + \lambda_k(B).$$

Mines-Ponts • Planche C

Soit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ distincts. Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
On pose :

$$\Phi :\ P \in \mathbb{C}_n[X] \longmapsto \left(P(a_0),\ \ldots,\ P(a_n)\right) \in \mathbb{C}^{n+1}.$$

1) Montrer que Φ est un isomorphisme.

2) Montrer que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, il existe un unique $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $L_i(a_i) = 1$, et $L_i(a_j) = 0$ pour tout $j \neq i$.

3) Exprimer χ_A comme combinaison linéaire des L_i.

4) En déduire que $f :\ A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \chi_A \in \mathbb{C}_n[X]$ est continue.

5) Montrer finalement que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Sans préparation

Mines-Ponts (sans prép.) • Planche A'

Soit A et B deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
Déterminez la probabilité pour que toutes les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + (A-1)\,y' + B^2\,y = 0$$

tendent vers 0 en $+\infty$.

Mines-Ponts (sans prép.) • Planche B'

1) Soit a, b deux réels strictement positifs.
Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a+n\,b}.$$

2) Calculer $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1+3\,n}$.
