Planches Mines-Ponts

Avec préparation de 15 minutes

Mines-Ponts • Planche A

Soit $\varphi : x \mapsto e^{-x^2}$. On admet que la fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que son intégrale vaut $\sqrt{\pi}$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrez qu'il existe un unique polynôme H_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x)\,\varphi(x).$$

Précisez le degré et le coefficient dominant de H_n.

2) Montrer que l'application

$$\psi : (P,Q) \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

3) **a.** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall P \in \mathbb{R}[X], \ \langle P, H_n\rangle = \langle P', H_{n-1}\rangle.$$

b. En déduire que la famille (H_n) est orthogonale.

c. Calculer $\|H_n\|^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) Soit $x, t \in \mathbb{R}$ fixé.
Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} H_n(x)\dfrac{t^n}{n!}$.

5) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Calculer la somme de la série entière de la variable t :

$$\sum_{n\geqslant 0} H_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Mines-Ponts • Planche B

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres, répétées selon leur multiplicité :

$$\lambda_1(A) \leqslant \lambda_2(A) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(A).$$

On note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
On pose :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad R_A(X) = \frac{\langle AX, X\rangle}{\langle X, X\rangle}.$$

Soit $k \in [\![1,n]\!]$ et G_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de dimension k. On note $(e_1,\ldots,e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad Ae_i = \lambda_i(A)\,e_i.$$

1) Montrer que :

$$\forall X \in \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_k) \setminus \{0\}, \quad R_A(X) \in \big[\lambda_1(A), \lambda_k(A)\big].$$

2) Montrer que :

$$\lambda_k(A) = \min_{V\in G_k}\Big(\max_{X\in V\setminus\{0\}} R_A(X)\Big).$$

3) Soit $A, B \in S_n(\mathbb{R})$.
En déduire que :

$$\lambda_1(A) + \lambda_k(B) \leqslant \lambda_k(A+B) \leqslant \lambda_n(A) + \lambda_k(B).$$

Mines-Ponts • Planche C

Soit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ distincts. Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
On pose :

$$\Phi : \ P \in \mathbb{C}_n[X] \longmapsto \big(P(a_0), \ldots, P(a_n)\big) \in \mathbb{C}^{n+1}.$$

1) Montrer que Φ est un isomorphisme.

2) Montrer que, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, il existe un unique $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $L_i(a_i) = 1$, et $L_i(a_j) = 0$ pour tout $j \neq i$.

3) Exprimer χ_A comme combinaison linéaire des L_i.

4) En déduire que $f : \ A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \chi_A \in \mathbb{C}_n[X]$ est continue.

5) Montrer finalement que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Mines-Ponts • Planche D

Soit $f : \ x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt}}{t}\sin(t)\,\mathrm{d}t$.

1) **a.** Justifier la convergence de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

b. En déduire que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

2) La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}_+^*$? sur $\mathbb{R}_+$?

3) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Exprimer f' de manière simple.

4) Trouver une expression de f. En déduire la valeur de I.

Sans préparation

Mines-Ponts (sans prép.) • Planche A'

Soit A et B deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in \,]0,1[$.
Déterminez la probabilité pour que toutes les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + (A-1)\,y' + B^2\,y = 0$$

tendent vers 0 en $+\infty$.

Mines-Ponts (sans prép.) • Planche B'

1) Soit a, b deux réels strictement positifs.
Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a+n\,b}.$$

2) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+3\,n}$.

Mines-Ponts (sans prép.) • Planche C'

Soit $n \geqslant 2$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\gamma \colon [0,1] \to U$ une fonction continue.
Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall\, t \in [0,1] : \quad \mathrm{B}(\gamma(t), \delta) \subset U.$$

Mines-Ponts (sans prép.) • Planche D'

Soit deux entiers $n, N \geqslant 2$. On considère n variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathscr{U}\big(\{1, \ldots, N\}\big)$. On note T le nombre de valeurs distinctes prises par ces n variables.

1) Calculer $\mathrm{E}(T)$.

2) Donner un équivalent de $\mathrm{E}(T)$ lorsque :

- **a.** $n \to \infty$, à N fixé ;
- **b.** $N \to \infty$, à n fixé ;
- **c.** $n = N \to \infty$.

3) Calculer $\mathrm{V}(T)$.
