Planches ENS

ENS • Planche A

On considère l'endomorphisme :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}. \end{array}$$

1) Déterminer le spectre de f.

2) f est-il diagonalisable quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$? quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

ENS • Planche B

Déterminer la nature, suivant $\alpha \in \mathbb{R}$, de la série :

$$\sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \frac{n^\alpha}{n^{2\alpha} + (-1)^n}.$$

ENS • Planche C

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne, avec $k \geqslant 0$.

a. Montrer que f est continue.

b. On suppose $k < 1$. Montrer que f admet un unique point fixe.

c. Donner un exemple de fonction 1-lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui n'a pas de point fixe.

2) On considère $E = \mathbb{R}^d$ muni d'une norme N. Soit $f : E \to E$ une fonction 1-lipschitzienne. Soit Ω l'ensemble des vecteurs x de E tels que la suite $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Montrer que $\Omega = \varnothing$ ou $\Omega = E$.

3) On suppose $E = \mathbb{C}$ et $f(z) = az + b$.

a. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit 1-lipschitzienne.

b. En supposant cette condition réalisée, donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\Omega = E$.

ENS • Planche D

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $u : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AMA^{\mathrm{T}}$.

1) On suppose A diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que u est diagonalisable.

b. Montrer que $\mathrm{tr}(u) = \big(\mathrm{tr}(A)\big)^2$.

c. Montrer que $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ est stable par u.
On note u_S l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que :

$$\mathrm{tr}(u_S) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(A^2) + \big(\mathrm{tr}(A)\big)^2\right).$$

2) On suppose désormais que $A^m = \mathrm{I}_n$, pour un entier $m \geqslant 1$.

a. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

b. Montrer qu'il existe des entiers r, s tels que $r + 2s \leqslant n$ et des entiers $k_1 \leqslant \cdots \leqslant k_s$ tels que :

$$\mathrm{tr}(A) = r + 2\sum_{i=1}^{s} \cos\left(\frac{2k_i\pi}{m}\right).$$

c. Montrer que l'ensemble $\{A^k \,;\, k \in \mathbb{N}\}$ est fini.

d. On pose $N = \mathrm{Card}\,\{A^k \,;\, k \in \mathbb{N}\}$. Montrer que :

$$\dim E_1(A) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mathrm{tr}(A^k).$$