

4.2.2 Dynamique référentiels en rotation-Exercice 15

Un terrain de rugby placé à la latitude $\lambda = 45^\circ$ est orienté nord-sud. Un joueur tente une pénalité à 40 m face aux poteaux.

Le ballon part avec une vitesse \vec{v}_0 dans la direction du nord en faisant l'angle $\alpha = 45^\circ$ avec l'horizontale.

La vitesse initiale vaut 20 m.s^{-1} . On néglige la résistance de l'air ainsi que la rotation propre du ballon.

On se propose de déterminer l'influence du caractère non galiléen du référentiel terrestre sur le point de chute du ballon.

a- Représenter la base locale du référentiel terrestre : Oz verticale ascendante du lieu, Oy tangent au méridien vers le nord, Ox tangent au parallèle vers l'est.

Projeter la relation fondamentale de la dynamique dans cette base.

b- Intégrer le système d'équations une fois par rapport au temps. Justifier en calculant la vitesse angulaire ω de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles, que l'on considère les termes en ω comme infiniment petit du premier ordre.

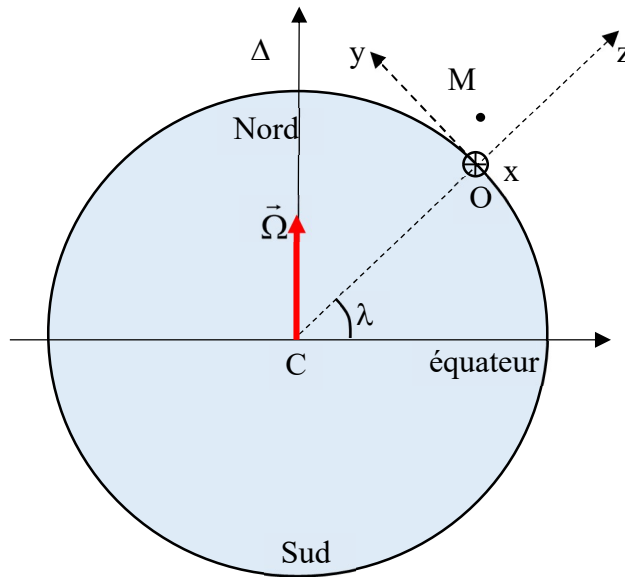
c- Montrer que les équations obtenues en ne considérant que les termes du premier ordre sont :

$$\begin{cases} \dot{x} = -2\omega(\cos \lambda z - \sin \lambda y) \\ \dot{y} = v_0 \cos \alpha \\ \dot{z} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

d- Calculer à l'aide des équations ci-dessus la déviation au point de chute littéralement en fonction de ω , v_0 , α et λ , puis numériquement avec $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$. Conclure.

4.2.2 Dynamique référentiels en rotation-Exercice 15

a-



Théorème de la quantité de mouvement dans le référentiel terrestre $R(Oxyz)$ non galiléen pour le ballon M :

$$m\vec{a}_{M/R} = m\vec{g} + \vec{F}_{ic} = m\vec{g} - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/R} \Rightarrow \begin{array}{|l} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{array} = \begin{array}{|l} 0 \\ 0 \\ -g \end{array} - 2 \begin{array}{|l} 0 \\ \omega \cos \lambda \\ \omega \sin \lambda \end{array} \wedge \begin{array}{|l} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -2\omega(\cos \lambda \dot{z} - \sin \lambda \dot{y}) \\ \ddot{y} = -2\omega \sin \lambda \dot{x} \\ \ddot{z} = -g + 2\omega \cos \lambda \dot{x} \end{cases}$$

b-En intégrant, avec le ballon en O à $t = 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2\omega(\cos \lambda z - \sin \lambda y) \\ \dot{y} = -2\omega \sin \lambda x + v_0 \cos \alpha \\ \dot{z} = -gt + 2\omega \cos \lambda x + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86160} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1} \quad \omega \text{ est très petite donc les termes en } \omega \text{ seront petits}$$

c-La première équation du système montre que x sera du premier ordre en ω .
Les termes en ωx dans les équations 2 et 3 seront d'ordre 2 donc négligeables.

Il reste :

$$\begin{cases} \dot{x} = -2\omega(\cos \lambda z - \sin \lambda y) \\ \dot{y} = v_0 \cos \alpha \\ \dot{z} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

d-On en déduit : $y = v_0 \cos \alpha t$ et $z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t$

Puis : $\dot{x} = -2\omega(\cos \lambda(-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t) - \sin \lambda \cos \alpha v_0 t) = \omega g \cos \lambda t^2 - 2\omega v_0 \sin(\alpha - \lambda)t$

En intégrant : $x = \omega g \cos \lambda \frac{t^3}{3} - 2\omega v_0 \sin(\alpha - \lambda) \frac{t^2}{2}$

Au point de chute du ballon : $z = 0 \Rightarrow t = 2 \frac{v_0}{g} \sin \alpha$

D'où : $x = \frac{8\omega v_0^3 \sin^3 \alpha \cos \lambda}{3g^2} - \frac{4\omega v_0^3 \sin^2 \alpha \sin(\alpha - \lambda)}{g^2} \Rightarrow x = \frac{4v_0^3 \omega \sin^2 \alpha}{g^2} \left(\frac{2}{3} \sin \alpha \cos \lambda - \sin(\alpha - \lambda) \right)$

A.N : $x = 4 \text{ mm}$ L'effet de la force de Coriolis est négligeable